NGUYỄN THỊ HƯỜNG

A'
B'
C
D'
C'
A
B
b
y
x
D

Kiến thức cơ bản & nâng cao

Hình học 12

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN THỊ HƯỜNG

KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO
HÌNH HỌC
12

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến!

Bước sang thế kỷ XXI, thế kỷ của sự "bùng nổ" thông tin, đã và đang mang lại cho chúng ta những kiến thức vô cùng phong phú trên tất cả các lĩnh vực khoa học tự nhiên cũng như xã hội. Điều đáng lưu ý là khối lượng kiến thức ngày càng nhiều đang mâu thuẫn với thời gian học tập có hạn của các em. Vì vậy, để khắc phục những mâu thuẫn trên, đồng thời làm tốt bài thi môn toán, các em cần có một vốn kiến thức vừa cơ bản, vừa bao quát toàn bộ chương trình.

Cuốn sách "**Hình học 12**", chúng tôi biên soạn dưới dạng vừa cung cấp những kiến thức cơ bản, vừa cung cấp những kiến thức nâng cao nhằm giúp các em ôn tập thi tốt nghiệp THPT và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng khối A, B, D.

Cuốn sách "**Hình học 12**" gồm hai phần:

1. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng (chương I)

2. Phương pháp tọa độ trong không gian (chương II)

Trong quá trình biên soạn, sẽ có những thiếu sót, chúng tôi mong nhận được sự góp ý chân thành từ các bạn đồng nghiệp và các em học sinh.

TÁC GIẢ

Chương I

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

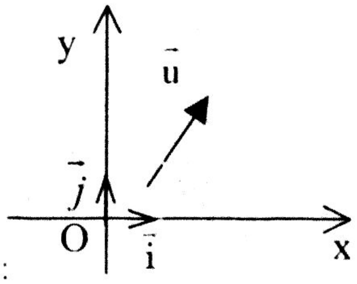
Vấn đề I

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM. PHƯƠNGTRÌNH ĐƯỜNG THẲNG. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

A. Ghi nhớ

I. Tọa độ của vectơ và của điểm

1. Tọa độ của vectơ



* *Định nghĩa* :

$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

* *Tính chất* :

cho $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x; y')$. Ta có các công thức sau:

a. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

b. $\vec{u} \pm \vec{u} = (x \pm x; y \pm y')$

c. $k\vec{u} = (kx; ky)$, với $k \in R$

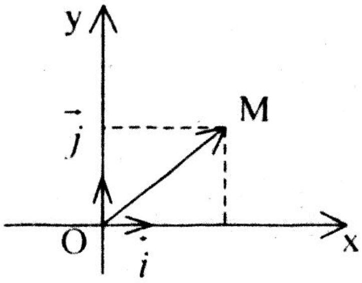
d. • $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$; $\vec{u}^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• $\vec{u} \neq \vec{0}$; $\vec{v} \neq \vec{0}$; $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

e. $\vec{u} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{u} = x.x' + y.y' = 0$

g. $\vec{u}$ cùng phương $\vec{u} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' = 0$

2. Tọa độ của điểm



* *Định nghĩa* : $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

* *Tính chất : Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Khi đó ta có :*

a. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

b. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

c. Nếu M chia đoạn AB theo tỷ số $k \neq 1$ (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) thì toạ độ của M là: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}$, $(k \neq 1)$

Hệ quả: *Điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB, ta có:* $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

* *Trọng tâm G của ΔABC có tọa độ là* $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

II. Phương trình của đường thẳng

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng là

$Ax + By + C = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

2. Phương trình tham số của đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ là: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(\forall t \in \mathbf{R})$ (1)

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ là: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ (2)

* *Chú ý:* Một số dạng khác của phương trình đường thẳng :

1. Phương trình đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

2. Đường thẳng (Δ) qua $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ (với $a.b \neq 0$) có phương trình là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

3. Phương trình đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và song song với đường thẳng (d) $Ax + By + C = 0$ là:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (-Ax_0 - By_0 \neq C)$

4. Phương trình đường thẳng qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và vuông góc với đường thẳng (d) $Ax + By + C = 0$ là : $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$

5. Phương trình đường thẳng song song với đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$ là : $Ax + By + C' = 0$; $(C' \neq C)$

6. Phương trình đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng (d) $Ax + By + C = 0$ là : $Bx - Ay + C' = 0$

III. Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đường thẳng (Δ):

$Ax + By + C = 0$ là $d(M_0, \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Đặc biệt : * $d(M_0, 0x) = |y_0|$

* $d(M_0, 0y) = |x_0|$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm của đường thẳng này đến đường thẳng kia.

IV. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1(A_1;B_1)$ và $\vec{n}_2(A_2;B_2)$. Góc giữa hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) là φ với $0^0 \le \varphi \le 90^0$ và

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. Dạng 1: Tìm toạ độ điểm thoả mãn điều kiện cho trước:

Lưu ý các điểm đặc biệt trong tứ giác, tam giác (trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, đỉnh, trung điểm cạnh)...

Bài 1 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có $A(2; -3)$; $B(3; -2)$; diện tích $S = \frac{3}{2}$ và có trọng tâm G thuộc đường thẳng (Δ): $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ điểm G, C ?

Chú ý:

Phương pháp 1:

+ Tính tọa độ điểm $G(x_G; y_G)$ theo tọa độ điểm A, B, C $(x_C; y_C)$ và $G \in (\Delta)$ nên được hệ phương trình hai ẩn x_C, y_C.

+ Diện tích ΔABC là: $S = \frac{1}{2}AB.AC\sin A = \frac{1}{2}.\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

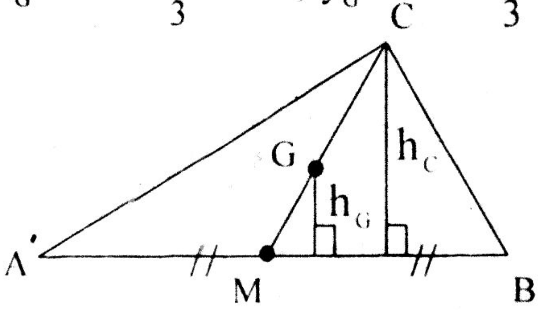
$= \frac{1}{2}ABAC.\sqrt{1-\cos^2(ABAC)}$ khi đó ta có phương trình hai ẩn x_C, y_C. Do đó tìm được x_C, $y_C \Rightarrow x_G$, y_G

Phương pháp 2:

+ Ta có $h_c = 3h_G \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 3\,S_{\Delta ABG}$ và $S_{\Delta ABG} = \frac{1}{2}AB.\,d(G, AB)$, khi đó có hệ phương trình hai ẩn x_G; y_G

+ $G \in (\Delta)$ nên được phương trình hai ẩn x_G, y_G

+ Tính x_C từ $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$



Giải

Cách 1: Xét C (x_C; y_C); G(x_G; y_G).

Ta có : $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{5 + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{-5 + y_C}{3} \end{cases}$

Mặt khác, điểm G(x_G; y_G)$\in (\Delta)$ nên ta có: $3x_G - y_G - 8 = 0$

$$\Rightarrow 3\,\frac{5 + x_C}{3} - \frac{-5 + y_C}{3} - 8 = 0 \Rightarrow y_C = 3x_C - 4 \qquad (1)$$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC\sin A$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} \quad \text{Với } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;1) \\ \overrightarrow{AC} = (x_C - 2; y_C + 3) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left|y_C + 3 - (x_C - 2)\right|$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left|y_C + 3 - (x_C - 2)\right| \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được : $\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}\left|(3x_C - 4) + 3 - (x_C - 2)\right| \Leftrightarrow \left|2x_C + 1\right| = 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_C = 1 \\ x_C = -2 \end{array}\right.$$

* Với $x_C = 1$; từ (1) ta có : $y_C = -1 \Rightarrow$ C(1; –1)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; -2)$$

* Với $x_C = -2$; từ (1) ta có : $y_C = -10 \Rightarrow$ C(–2; –10)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = -5 \end{cases} \Rightarrow G(1; -5)$$

Vậy C (1; –1); G(2; –2) hay C (–2; –10); G(1; –5)

Cách 2: Ta có $S_{\Delta ABC} = 3\,S_{\Delta ABG}$ và $S_{\Delta ABG} = \dfrac{1}{2}AB.\,d(G,AB)$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = 3.\,\frac{1}{2}AB.\,d(G,AB) \quad (*).\ \text{với } AB = \sqrt{2}$$

Đường thẳng AB qua A(2; –3) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1;\ 1)$ nên

g thẳng AB có phương trình là : $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 3}{1} \Leftrightarrow x - y - 5 = 0$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = 3.\dfrac{1}{2}.\sqrt{2}.\dfrac{|x_G - y_G - 5|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |x_G - y_G - 5| = 1 \quad (3)$

Điểm $G(x_G; y_G) \in (\Delta)$ nên ta có :

$$3x_G - y_G - 8 = 0 \Leftrightarrow y_G = 3x_G - 8 \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được : $|x_G - (3x_G - 8) - 5| = 1 \Leftrightarrow |3 - 2x_G| = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_G = 1 \\ x_G = 2 \end{array}\right.$$

* Với $x_G = 1$; từ (4) ta có: $y_G = -5 \Rightarrow G(1; -5)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{5 + x_C}{3} \\ -5 = \dfrac{-5 + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -2 \\ y_C = -10 \end{cases} \Rightarrow C(-2; -10)$$

* Với $x_G = 2$; từ (4) ta có : $y_G = -2 \Rightarrow G(2; -2)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{5 + x_C}{3} \\ -2 = \dfrac{-5 + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -1 \end{cases} \Rightarrow C(1; -1)$$

Vậy C (1; –1) ; G(2; –2) hay C (–2; –10) ; G(1; –5)

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy tìm hình chiếu vuông góc của M(1; 2) trên đường thẳng (Δ): x – y + 3 = 0.

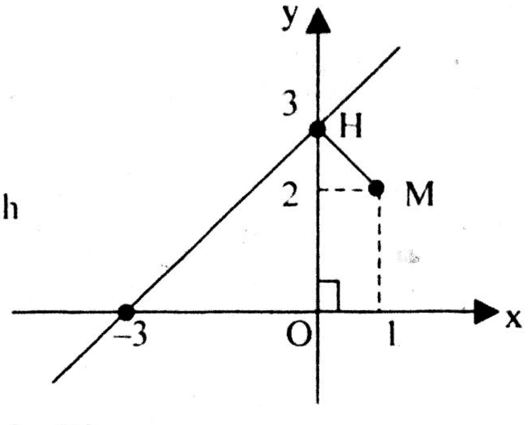
Giải

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ)

⇒ Đường thẳng MH qua M(1; 2) và MH ⊥(Δ)

⇒ Đường thẳng MH qua M(1; 2) và nhận vectơ $\vec{n}(1; -1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1}$$



⇒ (x-1) + (y-2) = 0 ⇒ x + y – 3 = 0

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

⇒ H(0; 3) là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ)

⇒ H∈(Δ) ⇒ H(a; a + 3)

$\Rightarrow \overrightarrow{MH} = (a - 1; a + 1)$

Ta có $\vec{u} = (1;1)$ là một vectơ chỉ phương của (Δ).

Mặt khác ta có $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = (a-1)+(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow H(0;3)$

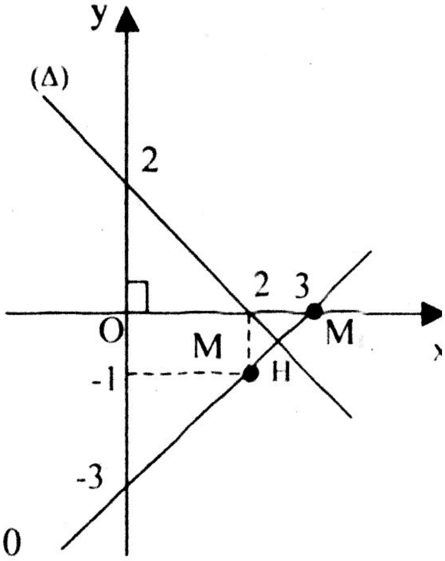
Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy tìm điểm đối xứng của M(2; −1) qu

đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ)

Tìm tọa độ điểm H:



Cách 1: Đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;-1)$

Đường thẳng MH qua M(2; −1) và MH ⊥ (Δ)

⇒ Đường thẳng MH qua M(2; −1) và nhận $\vec{u}(1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $(x-2)-(y+1)=0 \Rightarrow x-y-3=0$

⇒ Tọa độ điểm H là cặp (x; y) thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x=1+t; y=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+t)-(1-t)-3=0 \\ x=1+t; y=1-t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t=3 \\ x=1+t; y=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ x=\frac{5}{2}; y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$$

Cách 2: $H \in (\Delta) \Rightarrow H(1+t; 1-t)$

Ta có $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} = (1;-1)$ ($\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ))

$\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$ với $\overrightarrow{MH} = (t-1;2-t)$

$\Rightarrow (t-1)-(2-t)=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow H(\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$

Gọi $M_1(x_1; y_1)$ là điểm đối xứng của M qua (Δ) ⇒ H là trung điểm đoạ MM_1

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_M + x_{M_1}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_M + y_{M_1}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = 2x_H - x_M = 5 - 2 = 3 \\ y_{M_1} = 2y_H - y_M = -1 - (-1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $M_1(3; 0)$ là điểm đối xứng của M qua (Δ).

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có $A(1; -1)$; $B(5; -3)$; C thuộc trục tung Oy và trọng tâm G thuộc trục hoành Ox. Tìm tọa độ điểm C; G?

Giải

Ta có C thuộc trục tung Oy và trọng tâm G thuộc trục hoành Ox

$\Rightarrow$ $C(0; y_C)$; $G(x_G; 0)$

Mặt khác ta có
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{6}{3} \\ 0 = \dfrac{-4 + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_C = 4 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ $C(0; 4)$; $G(2; 0)$

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có trọng tâm $G(-2; -1)$, cạnh AB nằm trên đường thẳng (Δ): $4x + y + 15 = 0$ và cạnh AC nằm trên đường thẳng (D): $2x + 5y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A; B; C?

Giải

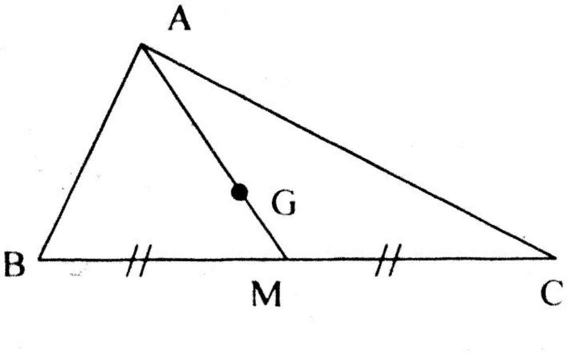
Cách 1: Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + y + 15 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $A(-4; 1)$

$M(x_M; y_M)$ là trung điểm cạnh BC, ta có:

$$\overline{GA} = -2\overline{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + 2x_M}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + 2y_M}{3} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{3x_G - x_A}{2} = -1 \\ y_M = \dfrac{3y_G - y_A}{2} = -2 \end{cases}$$

Vậy $M(-1, -2)$

Ta có: $B(x_B; y_B) \in (\Delta)$: $4x + y + 15 = 0 \Leftrightarrow 4x_B + y_B + 15 = 0$ (1)

Ta có: $C(x_C; y_C) \in (D)$: $2x + 5y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x_C + 5y_C + 3 = 0$ (2)

Mặt khác ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_M - x_B \\ y_C = 2y_M - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -2 - x_B \\ y_C = -4 - y_B \end{cases} \quad (*)$$

Thay (*) vào (2) ta được: $2(-2 - x_B) + 5(-4 - y_B) + 3 = 0$
hay $2x_B + 5y_B + 21 = 0$ (3)

Giải hệ phương trình (1) và (3) ta được: $\begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = -3 \end{cases}$

Vậy B(–3; –3)

Khi đó từ (*) ta có: $\begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -1 \end{cases}$

Vậy C(1, – 1)

Vậy A(–4; 1); B(–3; –3); C(1; –1)

Cách 2: Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + y + 15 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy A(–4; 1)

Xét $B(x_B; y_B)$; $C(x_C; y_C)$ ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - (x_A + x_B) \\ y_C = 3y_G - (y_A + y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -2 - x_B \\ y_C = -4 - y_B \end{cases} \quad (4)$$

Do $B(x_B; y_B) \in (\Delta)$; $C(x_C; y_C) \in (D)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 4x_B + y_B + 15 = 0 \\ 2(-2 - x_B) + 5(-4 - y_B) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_B + y_B + 15 = 0 \\ 2x_B + 5y_B + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow B(-3; -3)$$

Khi đó, từ (4) $\Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -1 \end{cases} \Rightarrow C(1; -1)$

Vậy A(–4; 1); B(–3; –3); C(1; –1)

Cách 3: Ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + y + 15 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A(-4; 1)$$

Ta có: $M(x_M; y_M)$ là trung điểm cạnh BC, suy ra: M(–1, –2) (Như cách 1)

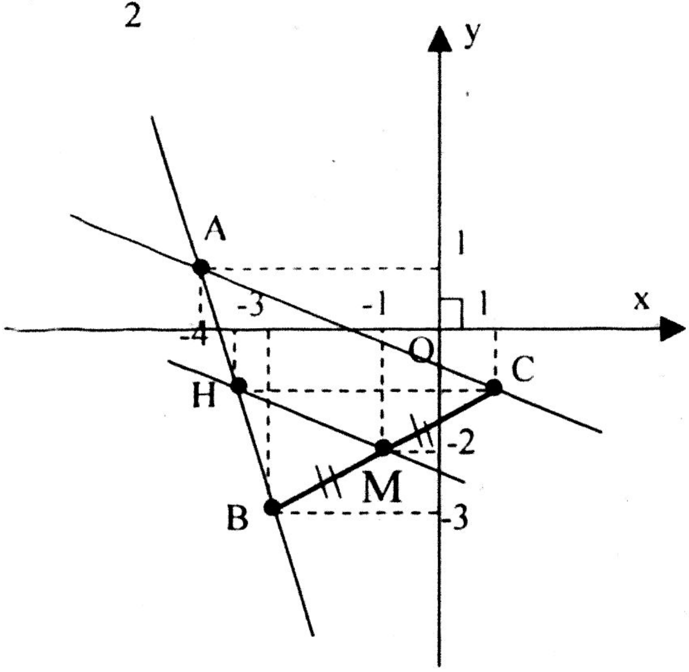
Gọi H là trung điểm cạnh AB, đường thẳng MH qua M(−1; −2) và MH // (D): $2x + 5y + 3 = 0$, nên phương trình đường thẳng MH là:

$$2(x + 1) + 5(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y + 12 = 0$$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + y + 15 = 0 \\ 2x + 5y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{2} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow H(-\frac{7}{2}; -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{2} = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ -1 = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -7 - x_A = -3 \\ y_B = -2 - y_A = -3 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -3)$$



Ta có M(−1; −2) là trung điểm cạnh BC

nên ta có: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{-3 + x_C}{2} \\ -2 = \dfrac{-3 + y_C}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow C(1; -1)$$

Vậy A(−4; 1); B(−3; −3); C(1; −1)

Chú ý: Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC ta cần xem ΔABC có đặc biệt không:

+ Nếu ΔABC đều thì trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC trùng với trọng tâm của ΔABC.

+ Nếu ΔABC vuông tại A thì A là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm cạnh BC.

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho Δ ABC có A(−2; 1); B(3; 5); C(2; −4). Tìm trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ABC.

Giải

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (5;4) \\ \overrightarrow{AC} = (4;-5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC} = 20 - 20 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Vậy ΔABC vuông tại A(−3; 1) ⇒ A(−3; 1) là trực tâm ΔABC và trung điểm $I(\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$ của cạnh BC là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Ta xét bài toán tổng quát sau:

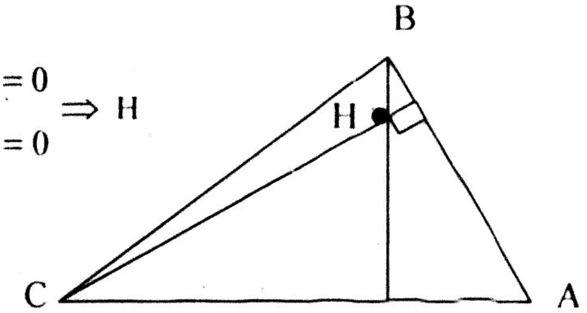
Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có A(−2; 1); B(3; 5); C(2; 1).

1. Tìm tọa độ trực tâm H; tâm I của đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G của ΔABC?

2. Chứng minh H, I, G thẳng hàng?

Chú ý:

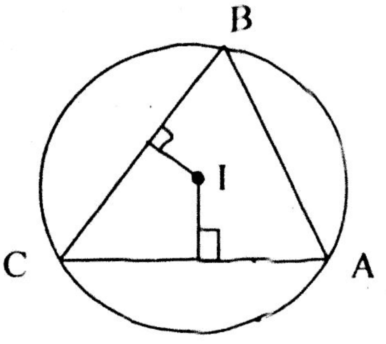
***Tìm tọa độ trực tâm H bằng các cách :**



+ ***Cách 1:*** Giải hệ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0 \end{cases} \Rightarrow H$

+ ***Cách 2:*** Viết phương trình hai đường cao và giải hệ gồm hai phương trình này ⇒ H

*** Tìm tọa độ I bằng các cách :**

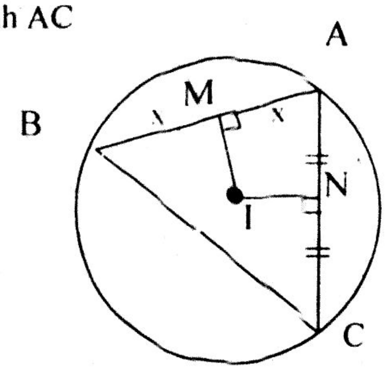


+ ***Cách 1 :*** Giải hệ $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Rightarrow I$

+ ***Cách 2*** : Viết phương trình hai đường trung trực hai cạnh ΔABC và giải hệ gồm phương trình này ⇒ Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC

+ ***Cách 3:*** Tìm trung điểm M cạnh AB ; trung điểm N cạnh AC

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{IN} \end{cases} \Rightarrow I$



(Lưu ý có thể viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC rồi suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

Ta chọn một trong các cách trên để trình bày lời giải bài 7 như sau:

Giải

1. *Tìm tọa độ trực tâm H $(x_H; y_H)$:

Ta có hệ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = 0 \end{cases}$

Với $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (5;4), \overrightarrow{AC}(4;0) \\ \overrightarrow{CH} = (x_H - 2; y_H - 1); \overrightarrow{BH} = (x_H - 3; y_H - 5) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(x_H - 2) + 4(y_H - 1) = 0 \\ 4(x_H - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 3 \\ y_H = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow H(3; -\frac{1}{4})$$

***Tìm tọa độ tâm I(a; b) của đường tròn ngoại tiếp ΔABC:**

Ta có $M(\frac{1}{2}; 3)$;$N(0;1)$ lần lượt là trung điểm cạnh AB; AC

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{IN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IN} = 0 \end{cases} (*)$$

Với $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (5;4), \overrightarrow{AC} = (4;0) \\ \overrightarrow{IM} = (\frac{1}{2} - a; 3 - b); \overrightarrow{IN} = (-a; 1 - b) \end{cases}$

$\Rightarrow$Do đó; từ (*) ta có hệ $\begin{cases} 5(\frac{1}{2} - a) + 4(3 - b) = 0 \\ -4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{29}{8} \end{cases} \Rightarrow I(0; \dfrac{29}{8})$

***Tìm tọa độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$:**

Ta có $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ với $O(0; 0)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-2 + 3 + 2}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{1 + 5 + 1}{3} = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow G(1; \frac{7}{3})$$

***Ta có** $\overrightarrow{GI} = (-1 ; \dfrac{31}{24})$ và $\overrightarrow{GH} = (2 ; -\dfrac{31}{12})$

$\Rightarrow \overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI} \Rightarrow$ H, I , G thẳng hàng

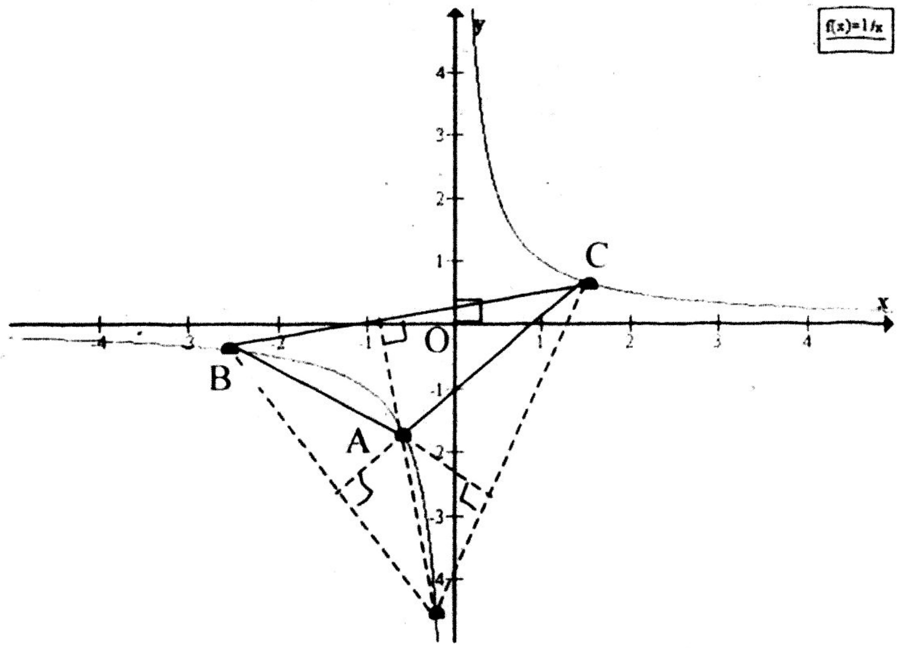
Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho Δ ABC có ba đỉnh thuộc (C): $y = \dfrac{1}{x}$. Biết hoành độ điểm A; B; C lần lượt là a; b; c. Tìm tọa độ trực tâm H của Δ ABC theo a; b;c từ đó suy ra $H \in (C)$.

Giải

Ta có: A; B; C $\in$ (C): $y = \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow$ a; b; c đôi một khác nhau; abc $\neq 0$ và $A(a; \dfrac{1}{a})$; $B(b; \dfrac{1}{b})$; $C(c; \dfrac{1}{c})$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (c - b; \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}) = \dfrac{b-c}{bc}(-bc; 1)$



+ Đường thẳng (Δ_1) chứa đường cao của ΔABC kẻ từ A nhận $\overrightarrow{n_1} = (-bc; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $-bc(x - a) + (y - \dfrac{1}{a}) = 0$. Gọi K là giao điểm thứ hai của (Δ_1) và (C). Hoành độ điểm K là nghiệm x của phương trình:

$-bc(x - a) + (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}) = 0$ (vì A không trùng K $\Rightarrow x \neq a$)

$\Rightarrow (x - a)(-bc - \dfrac{1}{ax}) = 0 \Rightarrow -bc - \dfrac{1}{ax} = 0$ (vì $x - a \neq 0$)

$\Rightarrow x = -\dfrac{1}{abc}$ $\Rightarrow K(-\dfrac{1}{abc}; -abc)$ (Vì $K \in (C) \Rightarrow y_K = \dfrac{1}{x_K}$)

+ Đường thẳng (Δ_2) chứa đường cao ΔABC kẻ từ B nhận $\overrightarrow{n_2} = (-ac; 1)$ làm vectơ pháp tuyến (vì $\overrightarrow{AC} = \dfrac{a-c}{ac}(-ac; 1)$) nên có phương trình: $-ac(x - b) + (y - \dfrac{1}{b}) = 0$. Hoành độ giao điểm thứ hai của (Δ_2) và (C) là nghiệm x của phương trình:

$-ac(x - b) + (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{b}) = 0$ (vì B không trùng K $\Rightarrow x \neq b$)

$\Leftrightarrow (x - b)(-ac - \dfrac{1}{bx}) = 0 \Leftrightarrow -ac - \dfrac{1}{bx} = 0$ (vì $x \neq b$)

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{abc} = x_K$

Vậy giao điểm thứ hai của (Δ_2) và (C) là K.

$\Rightarrow K = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$

$\Rightarrow K(-\dfrac{1}{abc}; -abc)$ là trực tâm ΔABC và $K \in (C)$ (điều phải chứng minh)

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho A(−1; 2); B(3; 4).
Tìm điểm $(C) \in$ (d): $x - 2y + 1 = 0$ sao cho ΔABC vuông ở C.

Giải

Cách 1: Xét $C(x_C; y_C)$ thỏa mãn bài toán

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C - 2y_C + 1 = 0 \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \quad \text{Với} \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x_C + 1; y_C - 2) \\ \overrightarrow{BC} = (x_C - 3; y_C - 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2y_C - 1 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = (x_C + 1)(x_C - 3) + (y_C - 2)(y_C - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2y_C - 1 & (1) \\ 2y_C(2y_C - 4) + (y_C - 2)(y_C - 4) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 5y_C^2 - 14y_C + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_C = 2 \\ y_C = \dfrac{4}{5} \end{array}\right.$$

Kết hợp (1), ta được: $\begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_C = \dfrac{3}{5} \\ y_C = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Vậy C(3; 2) hoặc $C(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5})$.

Cách 2: ΔABC vuông ở C nên C thuộc đường tròn có đường kính AB. Vậy C là giao điểm của (d) và đường tròn này $\Rightarrow$ Tọa độ C.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I(\dfrac{1}{2}; 0)$, phương trình đường thẳng AB: $x - 2y + 2 = 0$; AB = 2AD. Tìm tọa độ A; B; C; D biết A có hoành độ âm.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/11526

Giải

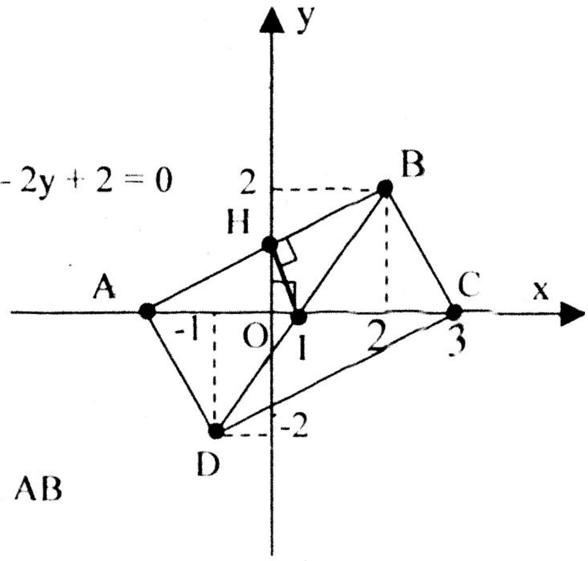
Ta có: $AD = 2d(I, AB) = 2\dfrac{\left|\dfrac{1}{2} + 2\right|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2}$

$= \sqrt{20 + 5} = 5 \ (1)$

Cách 1: Từ (1) $\Rightarrow AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow AI^2 = \dfrac{25}{4}$ (2)



Điểm A có hoành độ âm và $A \in (\Delta): x - 2y + 2 = 0$

$\Rightarrow A(2a, a + 1)$ (Với $a < 0$)

Từ (2) $\Rightarrow (2a - \dfrac{1}{2})^2 + (a + 1)^2 = \dfrac{25}{4}$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = -1$ (Vì $a < 0$)

$\Rightarrow A(-2; 0)$

+ Gọi H là trung điểm cạnh AB $\Rightarrow IH \perp AB$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng IH là:

$2(x - \dfrac{1}{2}) + y - 0 = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow H(0; 1)$$

Mặt khác, ta có: $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_H = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_H - x_A = 2 \\ y_B = 2y_H - y_A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow B(2; 2)$

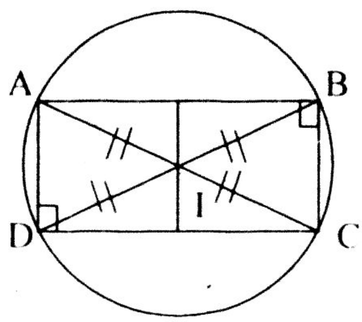
Ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 3 \\ y_C = 2y_I - y_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(3; 0)$

Ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_I = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = -1 \\ y_D = 2y_I - y_B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow D(-1; -2)$

Vậy $A(-2; 0)$; $B(2; 2)$; $C(3; 0)$; $D(-1; -2)$

Chú ý: *Có thể giải bài toán trên bằng các cách sau:*

Cách 2: A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C) tâm I có bán kính $R = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2}$



Tọa độ điểm A; B là nghiệm của hệ phương trình:

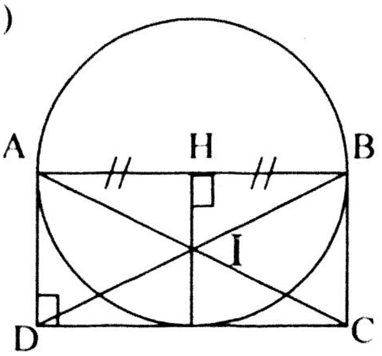
$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Vì $x_A < 0$ nên A(−2; 0); B(2; 2) ⇒ D(−1; −2); C(3; 0)
(vì I là trung điểm đoạn AC, BD)

Cách 3: +Tìm tọa độ điểm H là trung điểm cạnh AB (H là hình chiếu vuông góc của I trên AB)

+A; B là giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C_1) tâm H, bán kính $R_1 = \frac{AB}{2} = AD = \sqrt{5}$



$\Rightarrow$ A; B $\Rightarrow$ C; D

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho Δ ABC có A(1; 5); B(−4; −5); C(4; −1). Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp Δ ABC.

Chú ý: *Để tìm tâm đường tròn nội tiếp* Δ*ABC ta có thể giải một trong các cách sau:*

Cách 1: *+Gọi D; I lần lượt là chân đường phân giác trong góc A của ΔABC và tâm đường tròn nội tiếp ΔABC*

$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC} \Rightarrow D$$

+*Khi đó, ta có:* $\overrightarrow{IA} = -\frac{IA}{ID}.\overrightarrow{ID} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{BA}{BD}.\overrightarrow{ID} \Rightarrow I$

Cách 2: *+Viết phương trình (1) là đường phân giác trong góc A của ΔABC*

+Viết phương trình (2) là đường phân giác trong góc B của ΔABC

+Giải hệ $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$

$\Rightarrow$ *Tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp* ΔABC

Cách 3: *Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp* Δ ABC và a = BC; b = AC; c = AB

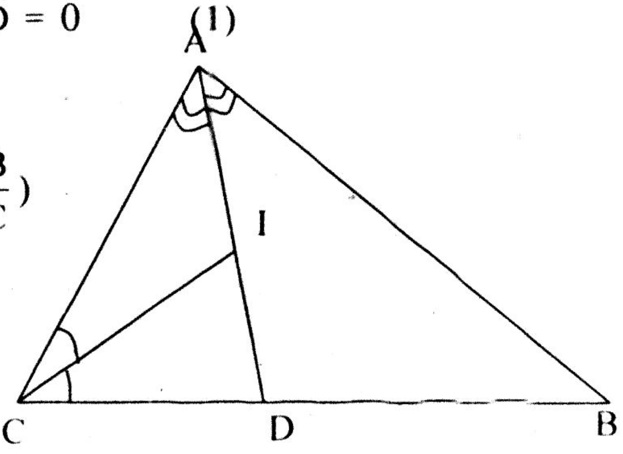
Ta có: $\boxed{a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}}$ *(*)*

Chứng minh (*), ta có:

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}.\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow b.\overrightarrow{DB} + c.\overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow b(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}) + c(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} - (b+c)\overrightarrow{ID} = \vec{0} \qquad (1)$$



Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{ID} = -\frac{ID}{IA}.\overrightarrow{IA}$

Mà $\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{DC}{AC}$ (vì $\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC}$)

$$\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{BD + DC}{BA + AC} = \frac{a}{b + c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ID} = -\frac{a}{b+c}\overrightarrow{IA} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được (*)

Giải

Cách 1: Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A của ΔABC. Ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3} \quad (\text{vì } \overrightarrow{AB} = (-5; -10))$$

* Ta có: $\overrightarrow{DB} = -\frac{DB}{DC}.\overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}.\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + \frac{5}{3}x_C}{1 + \frac{5}{3}} = \dfrac{-4 + \frac{5}{3}.4}{\frac{8}{3}} = 1 \\ y_D = \dfrac{y_B + \frac{5}{3}y_C}{1 + \frac{5}{3}} = \dfrac{-5 + \frac{5}{3}(-1)}{\frac{8}{3}} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Do đó $D(1; -\frac{5}{2})$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

$\Rightarrow$ I là chân đường phân giác trong của góc C của ΔACD, $D(1; -\frac{5}{2})$

$$\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{CA}{CD} = \frac{3\sqrt{5}}{\frac{3}{2}\sqrt{5}} = 2 \quad \text{vì } \overrightarrow{CD} = (-3; -\frac{3}{2})$$

Do đó: $\overrightarrow{IA} = -\frac{IA}{ID}.\overrightarrow{ID} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{ID}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A - (-2)x_D}{1+2} = \dfrac{1+2.1}{3} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + 2y_D}{1+2} = \dfrac{5 + 2.(-\frac{5}{2})}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1;\,0)$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{cases} c = AB = 5\sqrt{5} \\ b = AC = 3\sqrt{5} \\ a = BC = 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Gọi I(x; y) là tâm đường tròn nội tiếp Δ ABC

Theo (*), ta có:

$$4\sqrt{5}\,\overrightarrow{IA} + 3\sqrt{5}\,\overrightarrow{IB} + 5\sqrt{5}\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad (1) \quad \text{với} \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x;\,5-y) \\ \overrightarrow{IB} = (-4-x;\,-5-y) \\ \overrightarrow{IC} = (4-x;\,-1-y) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1);\Leftrightarrow \begin{cases} 4(1-x) + 3(-4-x) + 5(4-x) = 0 \\ 4(5-y) + 3(-5-y) + 5(-1-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 12 = 0 \\ -12y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(1;\,0)$$

Ghi nhớ: Từ (*) ta có công thức

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + c.\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{a.x_A + b.x_B + c.x_c}{a+b+c} \\ y_I = \dfrac{a.y_A + b.y_B + c.y_c}{a+b+c} \end{cases} \quad (**)$$

Dùng công thức (**) để kiểm tra kết quả đã giải bài 11.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho A(−1; 3); B(1; 1) và đường thẳng (d): y = 2x

1. Tìm C trên (C) sao cho Δ ABC đều.
2. Tìm C trên (C) sao cho Δ ABC cân.

Giải

Ta có $AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

1. Xét $C(x_0;\,y_0) \in (d) \Rightarrow y_0 = 2x_0 \Rightarrow C(x_0;\,2x_0)$

$$\textit{Cách 1: } \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ AC^2 = BC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 = (x_0+1)^2 + (2x_0-3)^2 \\ 8 = (x_0-1)^2 + (2x_0-1)^2 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0^2 - 10x_0 + 2 = 0 \\ 5x_0^2 - 6x_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{(5 \pm \sqrt{15})}{5} \\ x_0 = \dfrac{(3 \pm \sqrt{39})}{5} \end{cases} \text{. Hệ vô nghiệm}$$

Vậy không tồn tại $C \in (d)$ để ΔABC đều.

Cách 2: Từ (*) $\Rightarrow (x_0+1)^2 + (2x_0-3)^2 = (x_0-1)^2 + (2x_0-1)^2$

$\Rightarrow -4x_0 + 8 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$ (không thỏa mãn(*))

Vậy không tồn tại $C \in (d)$ để ΔABC đều

$$\textbf{2. } \Delta ABC \text{ cân} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = AC \\ AB = BC \\ AC = CB \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB^2 = AC^2 \\ AB^2 = BC^2 \\ AC^2 = CB^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8 = (x_0+1)^2 + (2x_0-3)^2 \\ 8 = (x_0-1)^2 + (2x_0-1)^2 \\ (x_0+1)^2 + (2x_0-3)^2 = (x_0-1)^2 + (2x_0-1)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x_0^2 - 10x_0 + 2 = 0 \\ 5x_0^2 - 6x_0 - 6 = 0 \\ -4x_0 + 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{5 \pm \sqrt{15}}{5} \\ x_0 = \dfrac{3 \pm \sqrt{39}}{5} \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$$

Vậy $C\left(\dfrac{5-\sqrt{15}}{5}; 2.\dfrac{5-\sqrt{15}}{5}\right)$ hoặc $C\left(\dfrac{5+\sqrt{15}}{5}; 2.\dfrac{5+\sqrt{15}}{5}\right)$

hoặc $C\left(\dfrac{5-\sqrt{39}}{5}; 2.\dfrac{5-\sqrt{39}}{5}\right)$ hoặc $C\left(\dfrac{5+\sqrt{39}}{5}; 2.\dfrac{5+\sqrt{39}}{5}\right)$ hoặc C(2; 4)

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC cân tại A: phương trìn cạnh AB: $3\sqrt{7}x - y - 3\sqrt{7} = 0$. B; C thuộc trục hoành Ox; A thuộc góc phần t thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

a. Xác định tọa độ các đỉnh ΔABC, biết nửa chu vi ΔABC bằng 9.

b. Tìm tọa độ điểm $M \in$ cạnh AB; $N \in$ cạnh BC sao cho đường thẳng MN đồn thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích ΔABC.

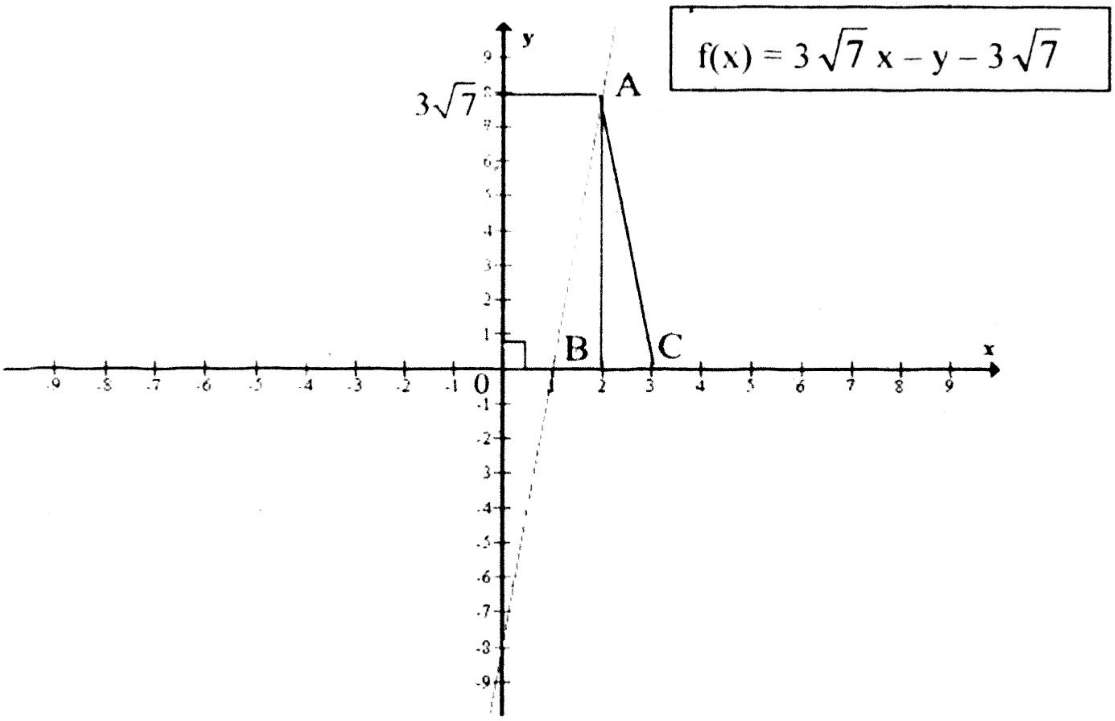
Giải

a. Ta có $B \in$ trục Ox $\Rightarrow B(b; 0)$

Mặt khác $B(b; 0) \in AB: 3\sqrt{7}x - y - 3\sqrt{7} = 0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{7}x - y - 3\sqrt{7} \Leftrightarrow b = 1$

Vậy $B(1; 0)$



Xét $A(x_A; y_A) \in AB: 3\sqrt{7}x - y - 3\sqrt{7} = 0$

$\Rightarrow 3\sqrt{7}x_A - y_A - 3\sqrt{7} = 0$

$\Rightarrow y_A = 3\sqrt{7}x_A - 3\sqrt{7}$

$\Rightarrow A(x_A; 3\sqrt{7}x_A - 3\sqrt{7})$ thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A \geq 0 \\ 3\sqrt{7}x_A - 3\sqrt{7} \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_A \geq 1$

Gọi đểm N_1 là trung điểm đoạn BC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{N_1} = \dfrac{x_B + x_C}{2} \qquad (1) \\ y_{N_1} = 0 \end{cases}$$

Vì ΔABC cân tại A và B, C thuộc trục Ox

$\Rightarrow x_{N_1} = x_A \quad (2)$

Từ (1); (2) $\Rightarrow x_A = \dfrac{b + x_C}{2}$

$\Rightarrow x_C = 2x_A - b = 2x_A - 1 \quad \Rightarrow C(2x_A - 1; 0)$

Ta có: $\frac{1}{2}(AB + AC + BC) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad AB + AC + BC = 18$

$\Leftrightarrow 2AC + BC = 18$ (vì Δ ABC cân tại A)

Mặt khác, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x_A - 1; -3\sqrt{7}(x_A - 1)) \\ \overrightarrow{BC} = (2(x_A - 1); 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = \sqrt{(x_A - 1)^2 + 63(x_A - 1)^2} = 8|x_A - 1| \\ BC = 2|x_A - 1| \end{cases}$$

$\Rightarrow 2.8|x_A - 1| + 2|x_A - 1| = 18$

$\Rightarrow 18|x_A - 1| = 18 \Rightarrow |x_A - 1| = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_A - 1 = 1 \\ x_A - 1 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 2 \\ x_A = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Do $x_A \geq 1$ nên ta có $x_A = 2$

Khi đó $A(2; 3\sqrt{7})$; $B(1; 0)$; $C(3; 0)$

b. Ta có: $A(2; 3\sqrt{7})$; $B(1; 0)$; $C(3; 0)$; $AB = AC = 8$; $BC = 2$

Nửa chu vi Δ ABC là 9.

M thuộc cạnh AB; N thuộc cạnh BC

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq BM \leq 8 \\ 0 \leq BN \leq 2 \end{cases}$$

Theo đề ra ta có:

$$\begin{cases} BM + BN = 9 & \text{(nửa chu vi)} \\ S_{\Delta MBN} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BM + BN = 9 \\ \frac{1}{2} BM.BN.\sin\widehat{MBN} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AB.BC.\sin\widehat{ABC}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BM + BN = 9 \\ BM.BN = \frac{1}{2} AB.BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM + BN = 9 \\ BM.BN = 8 \end{cases} \quad (\text{Vì } \sin\widehat{MBN} = \sin\widehat{ABC})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} BM = 8 \\ BN = 1 \end{cases} \quad \text{(Thỏa mãn điều kiện)} \\ \begin{cases} BM = 1 \\ BN = 8 \end{cases} \quad \text{(Loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BM = 8 \\ BN = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv A(2; 3\sqrt{7}), \text{ N là trung điểm của BC}$$

$\Leftrightarrow M(2; 3\sqrt{7})$; $N(2; 0)$

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC vuông tại A; đường thẳng BC có phương trình: $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$. Điểm A; B thuộc trục hoành.

Xác định tọa độ trọng tâm G của ΔABC biết bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2

Giải

BC: $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$

A; B ∈ trục Ox $\Rightarrow A(a;0); B(b;0)$ $(a \neq b)$

Do ΔABC vuông ở A và A; B ∈ Ox

$\Rightarrow C(a; y_C)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}b - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}a - y_C - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ y_C = \sqrt{3}a - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(1;0) \\ C(a; \sqrt{3}a - \sqrt{3}) \end{cases}$$

Khi đó trọng tâm G của ΔABC là: $G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$

Ta có: $S_{\Delta ABC} = pr = \frac{1}{2}AC.AB$ (*), với $\frac{AB + AC + BC}{2} = p$; $r = 2$

Mà $AB = |a-1|$; $AC = \sqrt{3}|a-1|$; $BC = 2|a-1|$

$$\Rightarrow p = \frac{|a-1| + \sqrt{3}|a-1| + 2|a-1|}{2}$$

Do đó, từ (*) $\Rightarrow |a-1|\frac{(1+\sqrt{3}+2)}{2}.2 = \frac{1}{2}.\sqrt{3}|a-1|.|a-1|$; $(a \neq b = 1)$

$$\Rightarrow (3 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.|a-1|$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.|a-1|$$

$$\Rightarrow |a-1| = 2(\sqrt{3}+1)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 2 + 2\sqrt{3} \\ a - 1 = -2 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 + 2\sqrt{3} \\ a = -1 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} G\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3}; \dfrac{2\sqrt{3}+6}{3}\right) \\ G\left(\dfrac{-1-4\sqrt{3}}{3}; \dfrac{-2\sqrt{3}-6}{3}\right) \end{array}\right.$$

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có A(–1; 0); B(4; 0); C(0; m); m ≠ 0. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC theo m. Xác định m để ΔGAB vuông ở G.

Giải

Ta có $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = \dfrac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow G(1; \frac{m}{3})$$

$$\Delta GAB \text{ vuông ở } G \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0 \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{GA} = (-2; -\dfrac{m}{3}) \\ \overrightarrow{GB} = (3; -\dfrac{m}{3}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $m = \pm 3\sqrt{6}$

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy.

1. Cho A(1; 1); B(4; –3). Tìm C ∈ (Δ): x – 2y – 1 = 0 sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

2. Cho ΔABC có AB = AC; $\widehat{BAC} = 90^0$; M(1; –1) là trung điểm cạnh BC; $G(\frac{2}{3}; 0)$ là trọng tâm Δ ABC. Tìm tọa độ A; B; C.

Giải

1. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -4)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-4} \Rightarrow 4x + 3y - 7 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $4x + 3y - 7 = 0$

Ta có: C ∈ (Δ): $x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow C(2t + 1; t)$; $(t \in R)$

Ta có: $d(C, AB) = 6$

$$\Leftrightarrow \frac{|4(2t+1) + 3t - 7|}{5} = 6 \Leftrightarrow |11t - 3| = 30$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11t - 3 = 30 \\ 11t - 3 = -30 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\dfrac{27}{11} \end{array}\right.$$

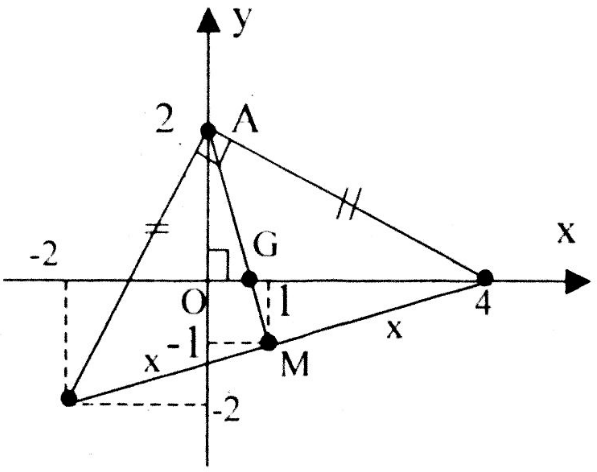
Vậy C(7; 3) hoặc $C(-\dfrac{43}{11}; -\dfrac{27}{11})$.

2. Đường thẳng (Δ) chứa cạnh BC qua điểm M(1; −1) và nhận $\overrightarrow{MG} = (-\frac{1}{3};1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $-\frac{1}{3}(x-1)+(y+1)=0$

$\Rightarrow -x + 3y + 4 = 0$

Ta có $B(x_B; y_B) \in (\Delta): -x + 3y + 4 = 0$

$\Rightarrow -x_B + 3y_B + 4 = 0$ (1)



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{GA} = (x_A - x_G; y_A - y_G) = (x_A - \frac{2}{3}; y_A) \\ \overrightarrow{GM} = (1 - \frac{2}{3}; -1) = (\frac{1}{3}; -1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_A = -2(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$$

Vì ΔABC vuông ở A nên ta có MB = MA, với $MA = |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{10}$ (*)

Cách 1: Từ (*) $\Rightarrow MB^2 = 10 \Rightarrow (x_B - 1)^2 + (y_B + 1)^2 = 10$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow (x_B - 1) = 3(y_B + 1)$ (3)

Thay (3) vào (2) ta được: $10(y_B + 1)^2 = 10 \Rightarrow (y_B + 1)^2 = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_B + 1 = 1 \\ y_B + 1 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_B = 0 \\ y_B = -2 \end{array}\right.$$

* Với $y_B = 0$; từ (3) $\Rightarrow x_B = 4 \Rightarrow B(4;0)$

Do M(1; −1) là trung điểm cạnh BC ⇒ C(−2; −2)

* Với $y_B = -2$; từ (3) $\Rightarrow x_B = -2 \Rightarrow B(-2; -2)$

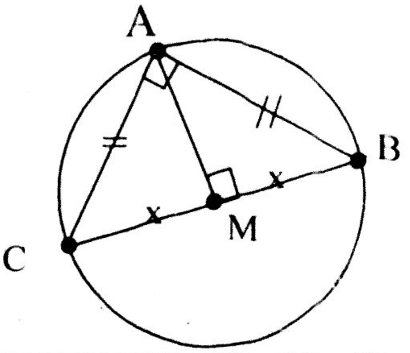
Do M(1; −1) là trung điểm cạnh BC ⇒ C(4; 0)

Vậy B(4; 0); C(−2; −2) Hay B(−2; −2); C(4; 0)

Cách 2: Ta có: B, C là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (C) tâm (1; −1); bán kính $R = AM = \sqrt{10}$.

Phương trình đường tròn (C) là: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$

Tọa độ điểm B; C là nghiệm của hệ :



$$\begin{cases}-x+3y+4=0\\(x-1)^2+(y+1)^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy B(4; 0); C(−2; −2) Hay B(−2; −2); C(4; 0)

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho ΔABC vuông tại A, có B(−3; 0); C(7; 0), bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là $r = 2\sqrt{10} - 5$. Tìm tọa độ I của đường tròn nội tiếp ΔABC. Biết I có tung độ dương.

Giải

Xét I(a; b) (b > 0)

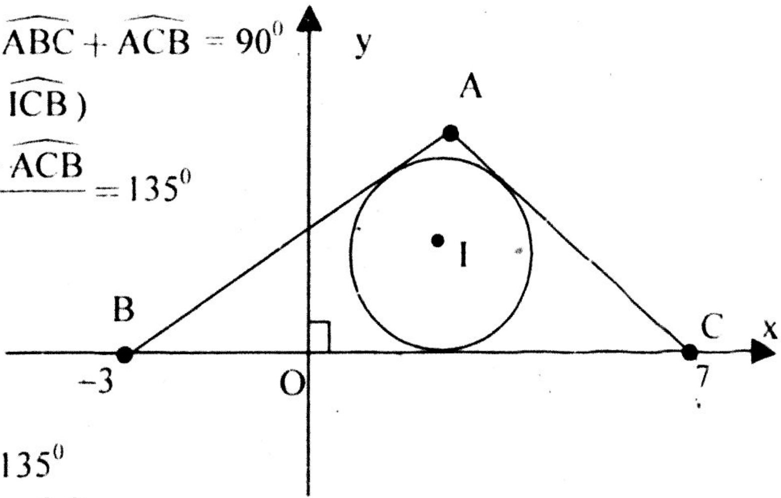
Ta có B; C $\in$ Ox nên $d(I; Ox) = r \Leftrightarrow |b| = r \Leftrightarrow r = b$ (vì b > 0)

$\Rightarrow b = 2\sqrt{10} - 5$

Do ΔABC vuông tại A $\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^0 - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB})$$

$$= 180^0 - \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 135^0$$



Ta có diện tích ΔBIC là:

$$S = \frac{1}{2}r.BC \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IB} = IC.IB\cos 135^0$$

$$= -IC.IB\sin 135^0 = -2.S$$

(vì $\cos 135^0 = -\sin 45^0$ mà $\sin 45^0 = \sin 135^0$)

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CI} \qquad (2)$$

Vậy từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CI} = -r.BC$ Với $\begin{cases}\overrightarrow{BI} = (a+3; b)\\ \overrightarrow{CI} = (a-7; b)\\ BC = 10\end{cases}$

$$\Rightarrow (a+3)(a-7) + b^2 = -r.BC$$

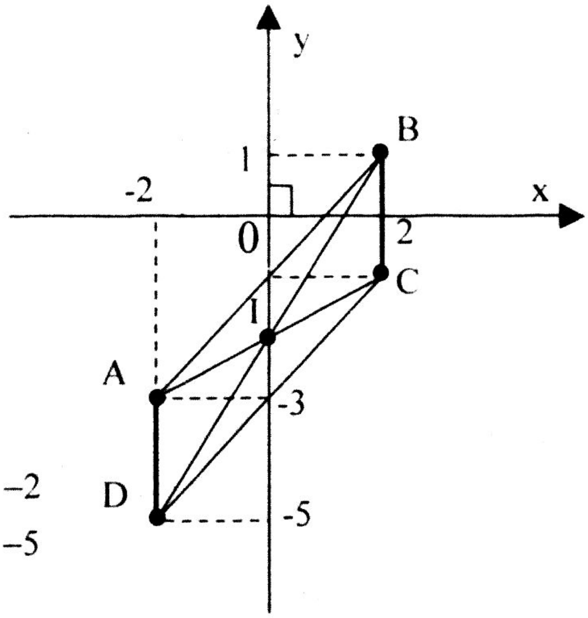
$$\Rightarrow a^2 - 4a - 21 + (2\sqrt{10} - 5)^2 = -(2\sqrt{10} - 5).10$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a = 2+\sqrt{10}\\ a = 2-\sqrt{10}\end{array}\right.$$

Vậy I $(2+\sqrt{10}; 2\sqrt{10} - 5)$ hay I$(2 - \sqrt{10}; 2\sqrt{10} - 5)$

Bài 18. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho A(−2; −3), B(2; 1), C(2; −1). Tìm tọa độ đỉnh D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Giải



Gọi I là tâm hình bình hành ABCD

$\Rightarrow$ I là trung điểm đoạn AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(0; -2)$

Ta có: $D(x_D; y_D)$, khi đó:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_I = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = -2 \\ y_D = 2y_I - x_B = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow D(-2; -5)$

Bài 19: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Cho ΔABC có A(−6; −3), B(−4; 3), C(9; 2). Tìm M trên cạnh AB, N trên cạnh AC sao cho MN // BC và AM = CN.

Giải

Từ M dựng đường thẳng (Δ) // AC; (Δ) cắt cạnh BC tại điểm D $\Rightarrow$ MD // NC

Mặt khác theo đề ta có MN // DC

Do đó tứ giác MNCD là hình bình hành

$\Rightarrow$ MD = NC (mà AM = NC)

$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MDA}$

$\Rightarrow$ AM = MD

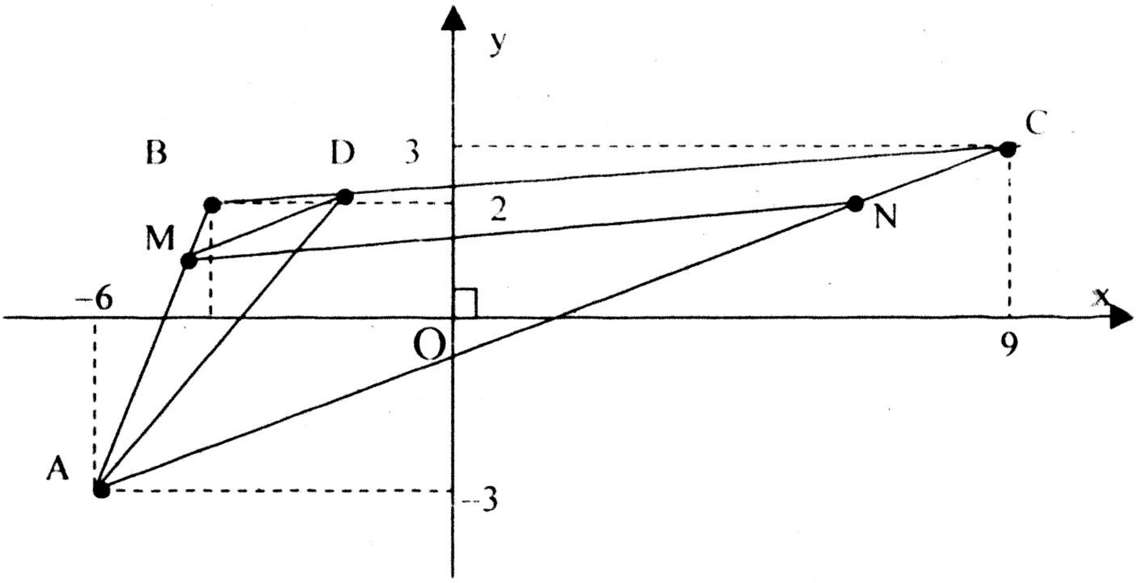
Mà MD //AC $\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{NAD}$

$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{NAD} \Rightarrow$ D là chân đường phân giác trong của góc A của ΔABC

Ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{10}} \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{2}{5}$

(vì $\overrightarrow{AB} = (2; 6)$; $\overrightarrow{AC} = (15; 5)$)

$\Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\dfrac{2}{5}\overrightarrow{DC}$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + \dfrac{2}{5}x_C}{1+\dfrac{2}{5}} \\ y_D = \dfrac{y_B + \dfrac{2}{5}y_C}{1+\dfrac{2}{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -\dfrac{2}{7} \\ x_D = \dfrac{19}{7} \end{cases} \Rightarrow D(-\frac{2}{7};\ \frac{19}{7})$$

Ta có MD // AC $\Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{DB}{DC}$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{2}{5}$. Mặt khác, ta có $\overrightarrow{MB} = -\dfrac{MB}{MA}.\overrightarrow{MA}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = -\frac{2}{5}.\overrightarrow{MA} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + \dfrac{2}{5}x_A}{1+\dfrac{2}{5}} \\ y_M = \dfrac{y_B + \dfrac{2}{5}y_A}{1+\dfrac{2}{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-4 + \dfrac{2}{5}(-6)}{\dfrac{7}{5}} = -\dfrac{32}{7} \\ y_M = \dfrac{3 + \dfrac{2}{5}(-3)}{\dfrac{7}{5}} = \dfrac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow M(-\frac{32}{7};\frac{9}{7})$$

Ta có Vì MN // BC $\Rightarrow \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{MB}{MA}$

$\Rightarrow \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{2}{5}$. Mặt khác, ta có $\overrightarrow{NC} = -\dfrac{NC}{NA}.\overrightarrow{NA}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NC} = -\frac{2}{5}.\overrightarrow{NA} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_C + \dfrac{2}{5}x_A}{1+\dfrac{2}{5}} \\ y_N = \dfrac{y_C + \dfrac{2}{5}y_A}{1+\dfrac{2}{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{9 + \dfrac{2}{5}(-6)}{\dfrac{7}{5}} = \dfrac{33}{7} \\ y_N = \dfrac{2 + \dfrac{2}{5}(-3)}{\dfrac{7}{5}} = \dfrac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow N(\frac{33}{7}; \frac{4}{7})$$

Bài 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho Δ ABC; phương trình đường thẳng AB là: $x - 2y + 7 = 0$, các đường trung tuyến kẻ từ A; B lần lượt có phương trình là: $x + y - 5 = 0$ và $2x + y - 11 = 0$

1. Tìm tọa độ các đỉnh A; B; C. 2. Tìm diện tích Δ ABC.

Giải

1. + Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(1; 4)$$

+ Tọa độ trọng tâm G của Δ ABC là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow G(6; -1)$$

+ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 2x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(3; 5)$$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = \dfrac{4 + x_C}{3} \\ -1 = \dfrac{9 + y_C}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 14 \\ y_C = -12 \end{cases} \quad \Leftrightarrow C(14; -12)$$

Vậy A(1; 4), B(3; 5), C(14; −12)

2. Ta có diện tích ΔABC là:

$$S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 1) \\ \overrightarrow{AC} = (13; -16) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left|-32 - 13\right| = \frac{45}{2} \text{ (đvdt)}$$

Bài 21. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy tìm B thuộc đường thẳng $y = 3$ và C trên trục hoành Ox sao cho ΔABC đều. Biết $A(1; -1)$.

Giải

Theo đề ra ta có: $B(x_0;3)$; $C(a;0)$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ AB^2 = BC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 - 1)^2 + 4 = (a - 1)^2 + 1 \\ (x_0 - 1)^2 + 4 = (a - x_0)^2 + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_0 - 1)^2 = (a - 1)^2 - 3 \\ (x_0 - 1)^2 = \left[(a - 1) - (x_0 - 1)\right]^2 + 5 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} u = x_0 - 1 \\ v = a - 1 \end{cases}$, Hệ (*) trở thành

$$\begin{cases} u^2 = v^2 - 3 \\ u^2 = (v - u)^2 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = v^2 - 3 \\ v^2 - 2uv + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - u^2 = 3 & (1) \\ u^2 - 2uv + 8 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

* Nhận xét $u = 0$ không thoả (2)

* Xét $u \neq 0$

Đặt $v = ku$, hệ (I) trở thành: $\begin{cases} u^2(k^2 - 1) = 3 \\ u^2(1 - 2k) = -8 \end{cases}$ (3)

$$\Rightarrow \frac{k^2 - 1}{1 - 2k} = -\frac{3}{8} \Rightarrow 8k^2 - 6k - 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\frac{1}{2} \\ k = \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

- Với $k = -\frac{1}{2}$; (3) $\Rightarrow u^2(-\frac{3}{4}) = 3$ Phương trình vô nghiệm
- Với $k = \frac{5}{4}$; (3) $\Rightarrow u^2\frac{19}{16} = 3 \Rightarrow u^2 = 3.\frac{16}{9} \Rightarrow u^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow u = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ v = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} u = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ v = -\dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ a - 1 = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x_0 - 1 = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ a - 1 = -\dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = \dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ a = \dfrac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = \dfrac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}} \\ a = \dfrac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(\dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};3);\ C(\dfrac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};0) \\ B(\dfrac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}};3);\ C(\dfrac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}};0) \end{array} \right.$$

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ΔABC có A(1;0); B(−1;1); C(0; −2)

1. Tìm trực tâm; trọng tâm; tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
2. Tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Chú ý: ΔABC vuông ở A ta có:

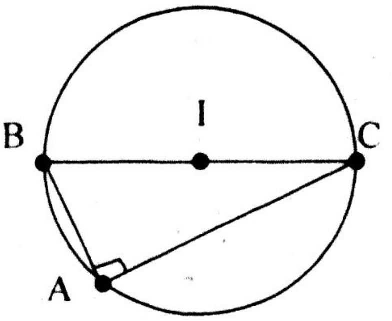
a) Trực tâm là A.

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm I của cạnh BC

c) $S_{\Delta ABC} = p.r$ (r: bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC, $p = \dfrac{1}{2}(AB + AC + BC)$

$$\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).r$$

$$\Rightarrow r = \frac{AB.AC}{AB + AC + BC}$$



Vậy tận dụng chú ý này để giải bài 22 như sau:

Giải

1. + Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2;1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1;-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow$ ΔABC vuông tại A $\Rightarrow$ A(1;0) là trực tâm ΔABC.

+ Tâm I đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm cạnh BC $\Rightarrow I(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2})$

2. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC

Ta có $S_{\Delta ABC} = p.r$

Mặt khác ta có $\begin{cases} AB = AC = \sqrt{5} \\ BC = \sqrt{10} \end{cases}$

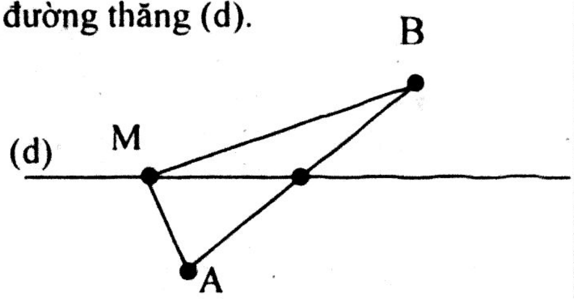
$$\Rightarrow \frac{1}{2}AB.AC = r\left(\frac{AB+AC+BC}{2}\right) \Rightarrow AB.AC = r.(AB+AC+BC)$$

$$\Rightarrow r = \frac{AB.AC}{AB+AC+AC} = \frac{AB^2}{2AB+BC} = \frac{(\sqrt{5})^2}{2\sqrt{5}+\sqrt{10}} \Rightarrow r = \frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}$$

Ghi nhớ:

I. Tìm M thuộc đường thẳng (d) để tổng các khoảng cách từ M đến A; B nhỏ nhất.

*** Trường hợp 1:** A, B ở về hai phía đối với đường thẳng (d).



Khi đó $\forall M \in (d)$, ta có:

$MA + MB \geq AB$ (không đổi) (*)

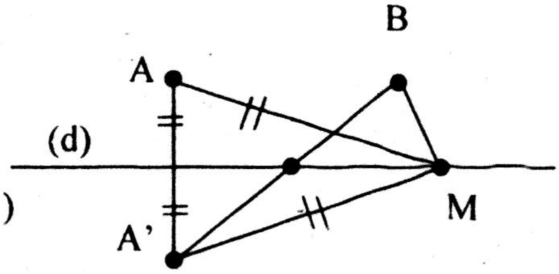
$MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng AB

$\Leftrightarrow$ (*) xảy ra "="

$\Leftrightarrow M = AB \cap (d)$

($\Leftrightarrow \overline{MA}, \overline{AB}$ cùng phương $\Rightarrow$ M)

*** Trường hợp 2:**



A, B ở về 1 phía đối với đường thẳng (d).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (d)

Ta có $M \in (d) \Rightarrow MA = MA'$

Do đó $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ (**)

$MA + MB$ nhỏ nhất bằng A'B

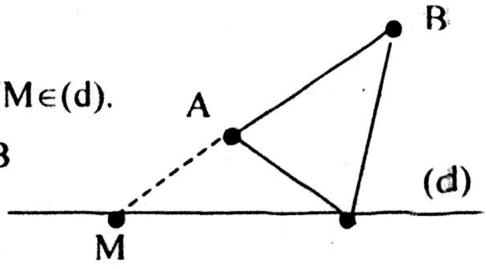
$\Leftrightarrow$ (**) xảy ra "="

$\Leftrightarrow M = A'B \cap (d)$.

(Chú ý: Có thể xét B' là điểm đối xứng của B qua (d))

II. Tìm $M \in (d)$ để $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

*** Trường hợp 1:**



A,B ở cùng phía đối với đường thẳng (d).

Ta có: $|MA - MB| \leq AB$ (không đổi) (I). $\forall M \in (d)$.

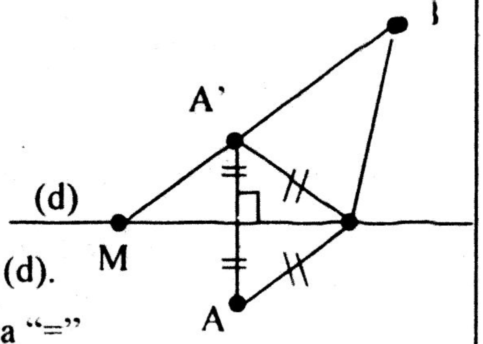
Vậy $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất bằng AB

$\Leftrightarrow$ (I) xảy ra "="

$\Leftrightarrow M = AB \cap (d)$

($\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Rightarrow$ M)

*** Trường hợp 2:**



A, B ở về 2 phía đối với đường thẳng (d).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (d)

Ta có $M \in (d) \Rightarrow MA = MA'$

$\Rightarrow |MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$ (II). $\forall M \in (d)$.

$|MA - MB|$ lớn nhất bằng A'B $\Leftrightarrow$ (II) xảy ra "="

$\Leftrightarrow M = A'B \cap (d)$

($\Leftrightarrow \overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{A'B}$ cùng phương $\Rightarrow M$)

*** Ứng dụng:**

+ Tìm $M \in (\Delta)$ để MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất
và $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

+ Giải phương trình vô tỷ hoặc giá trị tuyệt đối

Bài 23. Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \ge \sqrt{13}$ (1) $\forall x \in R$
Xác định x để dấu "=" xảy ra. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số
$y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

Giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (2)^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (1)^2} \ge \sqrt{13}$ (2)

Chọn A(1; –2); B(3; 1); M(x; 0) ∈ Ox

Ta có $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \ge |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{AB}|$; $\forall M \in Ox$

$\Leftrightarrow AM + MB \ge AB$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (+2)^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (1)^2} \ge \sqrt{(3-1)^2 + (1+2)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \ge \sqrt{13}$ (1)

Ta có A; B ở về hai phía đối với Ox và M thuộc Ox.

Do vậy (1) xảy ra dấu "=" ⇔ (*) xảy ra dấu "="

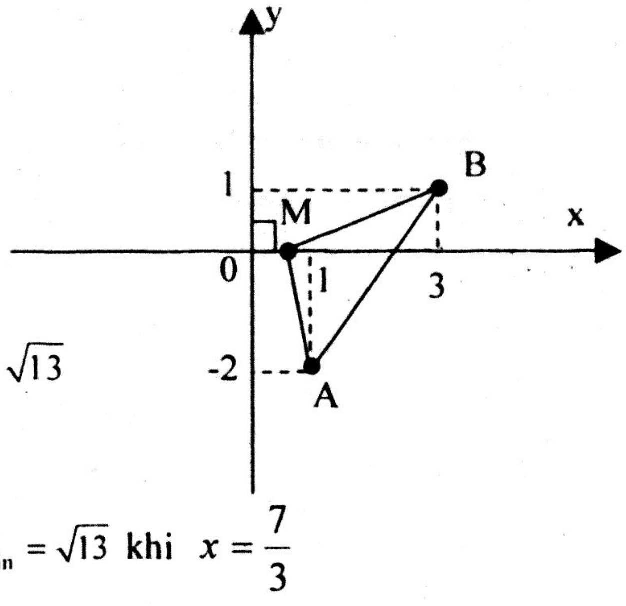
$\Leftrightarrow M = AB \cap Ox$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương. Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;3) \\ \overrightarrow{AM} = (x-1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 4 - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

Vậy (1) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

Khi đó $M\left(\dfrac{7}{3}; 0\right)$



* Ta có:

$y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} \ge \sqrt{13}$

Dấu '=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là: $y_{min} = \sqrt{13}$ khi $x = \dfrac{7}{3}$

Hệ quả: Phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-6x+10}=\sqrt{13}$ có nghiệm $x=\frac{7}{3}$.

Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy tìm điểm P trên trục hoành sao cho tổng các khoảng cách từ P đến A(1; 2); B(3; 4) nhỏ nhất.

Giải

Ta có $P \in Ox \Rightarrow P(x; 0)$

Điểm A, B ở cùng một phía đối với trục Ox

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Ox $\Rightarrow A'(1; -2) \Rightarrow A'B = 2\sqrt{10}$

Khi đó $PA = PA'$; $\forall P \in Ox$

$\Rightarrow PA + PB = PA' + PB \geq A'B \Rightarrow PA + PB \geq 2\sqrt{10}$ (1)

(1) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow$ P, A', B thẳng hàng

$\Leftrightarrow P = A'B \cap Ox \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'P}$ cùng phương. Mà: $\begin{cases} \overrightarrow{A'B} = (2;6) \\ \overrightarrow{A'P} = (x-1;2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{2}{6} \Leftrightarrow x-1=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

Vậy điểm P cần tìm là $P(\frac{5}{3}; 0)$.

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho A(1; 5); B(2; −3)

1. Xác định $M \in Ox$ sao cho $P = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.
2. Tìm $M \in Ox$ sao cho MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

Ta có $M \in Ox \Leftrightarrow M(x; 0)$

1. Ta có A, B ở về hai phía đối với Ox.

Gọi A' là điểm đối xứng của B qua Ox $\Rightarrow B'(2; 3) \Rightarrow AB' = \sqrt{5}$

$\Rightarrow MB = MB'$; $\forall M \in Ox$

Khi đó $P = |MA - MB| = |MA - MB'| \leq AB' = \sqrt{5}$ (1)

(1) xảy ra dấu bằng "=" $\Leftrightarrow M = AB' \cap Ox$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương. Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AB'} = (1;-2) \\ \overrightarrow{AM} = (x-1;-5) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$$

Vậy điểm M cần tìm là $M(\frac{7}{2}; 0)$

và giá trị lớn nhất của P là $P_{max} = AB' = \sqrt{5}$

2. Ta có A, B ở về hai phía đối với trục Ox và AB = $\sqrt{65}$

$\Rightarrow MA + MB \ge AB = \sqrt{65}$ (2) ; $\forall M \in Ox$

Ta có: (2) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow M = AB \cap Ox$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương. Mà $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (1;-8)\\ \overrightarrow{AM} = (x-1;-5)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = \frac{13}{8} \Leftrightarrow M(\frac{13}{8};0)$

Vậy điểm M cần tìm là: $M(\frac{13}{8};0)$ và MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{65}$

Bài 25: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho A(–5; 3); B(–2; 4)

1. Xác định $M \in Ox$ sao cho $P = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.
2. Tìm $M \in Ox$ sao cho MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Ta có $M \in Ox \Leftrightarrow M(x;0)$

1. Ta có A, B ở cùng một phía đối với trục Ox và AB = $\sqrt{10}$

$\Rightarrow P = |MA - MB| \le AB = \sqrt{10}$ (1)

Ta có: (1) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow M = AB \cap Ox$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương. Mà $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (3;1)\\ \overrightarrow{AM} = (x+5;-3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{x+5}{3} = -3 \Leftrightarrow x = -14 \Leftrightarrow M(-14;0)$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là $P_{max} = AB = \sqrt{10}$ khi M(–14; 0).

2. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua Ox $\Rightarrow$ B'(–2; –4) $\Rightarrow AB' = \sqrt{58}$

Ta có MB = MB' ; $\forall M \in Ox$

$\Rightarrow MA + MB = MA + MB' \ge AB' = \sqrt{58}$ (*)

(*) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow M = AB' \cap Ox$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương. Vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB'} = (3;-7)\\ \overrightarrow{AM} = (x+5;-3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{x+5}{3} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = -\frac{26}{7}$.

Do đó MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $AB' = \sqrt{58}$

Khi $M(-\frac{26}{7};0)$

Bài 26. Giải các phương trình:

1. $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$ (2)
2. $\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-10x+50}\right|=5$ (3)

Bài 26 có nhiều cách giải, tuy nhiên trong phần này ta vận dụng ghi nhớ để giải.

Giải

1. Ta có (2) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{29}$

Xét A(1; –2); B(–1; 3);

Ta có: $M \in Ox \Rightarrow M(x;0)$; $AB = \sqrt{29}$

Ta có A, B ở về 2 phía đối với Ox, Khi đó: $MA + MB \geq AB$ (*) ; $\forall M \in Ox$

Ta có phương trình (2) ⇔ (*) xảy ra dấu "="

$\Leftrightarrow M = AB \cap Ox \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-2;5)\\ \overrightarrow{AM}=(x-1;2)\end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{2}{5}$$

$$x-1=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm là: $x=\frac{1}{5}$.

2. Ta có (3) $\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-2)^2+1}-\sqrt{(x-5)^2+5^2}\right|=5$

Xét $M(x;0) \in Ox$; A(2; –1); B(5; –5)

Ta có A, B ở về 1 phía đối với Ox.

$$\Rightarrow |MA-MB| \leq AB=5 \Rightarrow \left|\sqrt{(x-2)^2+1}-\sqrt{(x-5)^2+5^2}\right| \leq 5 \quad (1)$$

Phương trình (3) ⇔ (1) Xảy ra dấu "="

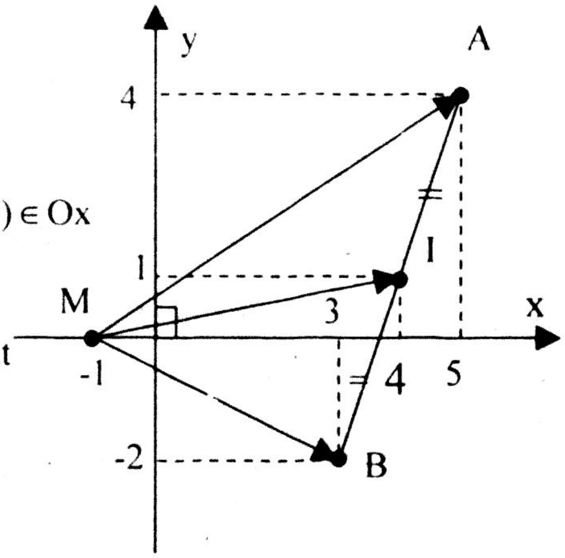
$\Rightarrow M = AB \cap Ox \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}$ cùng phương

$$\text{Mà } \begin{cases}\overrightarrow{AB}=(3;-4)\\ \overrightarrow{AM}=(x-2;1)\end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{1}{-4} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$$

Vậy phương trình (3) có nghiệm là: $x=\frac{5}{4}$.

Bài 27. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho A(5; 4); B(3; –2). Điểm M lưu động trên Ox. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$. Khi đó xác định tọa độ điểm M?

Giải



Gọi I là trung điểm đoạn AB

$$\Rightarrow \begin{cases} I(4;1) \\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI} \end{cases} ;\ \forall M(x;0)\in Ox$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = 2MI$$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất ⇔ MI nhỏ nhất

(Ta có $I \notin Ox$; $M \in Ox \Rightarrow M \neq I$)

$\Leftrightarrow MI = \sqrt{(4-x)^2+1^2}$ nhỏ nhất

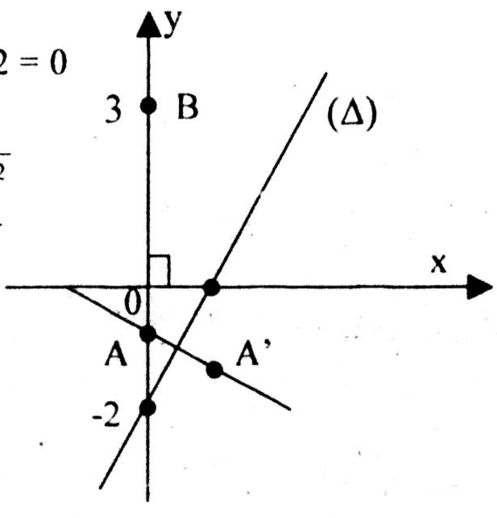
Mà $MI = \sqrt{(4-x)^2+1^2} \geq 1$ (1)

MI nhỏ nhất bằng 1 ⇔ (1) xảy ra dấu "=" ⇔ $x = 4$ ⇔ $M(4;0)$

Bài 28. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

Trong đó x; y là các số thực thỏa mãn $2x - y = 2$ (Δ).

Giải



Ta có: $M(x;y) \in (\Delta)$; $f(x;y) = 2x - y - 2 = 0$

$\Rightarrow 2x_M - y_M = 2$

$$\text{Xét } \begin{cases} MA = \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(-x)^2+(-1-y)^2} \\ MB = \sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{(-x)^2+(3-y)^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow A(0;-1); B(0;3)$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} f(0;-1) = 2x_A - y_A - 2 = -1 \\ f(0;3) = 2x_B - y_B - 2 = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(0;-1).f(0;3) > 0$

⇒ A(0; −1); B(0; 3) ở cùng phía đối với đường thẳng (Δ)

Vậy tìm M ∈ (Δ) để MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (Δ)

Phương trình đường thẳng AA' là:

$1(x-0)+2(y+1)=0 \Leftrightarrow x+2y+2=0$

H = AA' ∩ (Δ). Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2}{-5} = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{6}{-5} = -\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{5};-\frac{6}{5}\right)$$

Ta có H là trung điểm đoạn AA'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5} \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -\frac{12}{5} + 1 = -\frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow A'(\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}) \Rightarrow A'B = 2\sqrt{5}$$

Ta có MA = MA' ; $\forall M \in R \Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 2\sqrt{5}$ (1)

MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $A'B = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow$ (1) xảy ra dấu "="

$\Leftrightarrow M = A'B \cap (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{A'B}$ cùng phương với $\begin{cases} \overrightarrow{MB} = (x_M - 0; y_M - 3) \\ \overrightarrow{A'B} = (-\frac{4}{5}; \frac{22}{5}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_M}{\frac{-4}{5}} = \frac{y_M - 3}{\frac{22}{5}} \Leftrightarrow -\frac{x_M}{2} = \frac{y_M - 3}{11} \Leftrightarrow 11x_M + 2(y_M - 3) = 0\ (*)$$

Mà $2x_M - y_M = 2 \Leftrightarrow y_M = 2x_M - 2 \Leftrightarrow y_M - 3 = 2x_M - 5$ (I)

Thay (I) vào (*) ta được $11x_M + 2(2x_M - 5) = 0 \Leftrightarrow 15x_M - 10 = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{2}{3}$

Khi đó ta có $y_M = \frac{2}{3}$.

Vậy $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ ta có $\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất đó là: $A'B = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{22^2}{25}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

Do đó $\text{Min}(\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{5}$ khi $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Cách 2: Ta có $2x - y = 2 \Leftrightarrow y = 2x + 2$

Ta có:

$$f(x) = (\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = (\sqrt{x^2 + (2x+1)^2} + \sqrt{x^2 + (2x-5)^2}$$
$$= (\sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$$

+ TXĐ: D = R

+ $f'(x) = \frac{5x - 2}{\sqrt{5x^2 - 4x + 1}} + \frac{5x - 10}{\sqrt{5x^2 - 20x + 25}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}} = \frac{10-5x}{\sqrt{5x^2-20x+25}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{25x^2-20x+4}{5x^2-4x+1} = \dfrac{100+25x^2-100x}{5x^2-20x+25} \\ 5x-2 \ge 0;\ 10-5x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x=0 \\ \dfrac{2}{5} \le x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \\ \dfrac{2}{5} \le x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Ta có $f'(0) < 0$; $f'(1) > 0$ nên bảng biến thiên của $f(x)$ là:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Chú ý: Có thể dùng bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$ để giải bài toán sau:

Bài 29. Chứng minh rằng:

1. $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}; \forall a,b,c,d \in \mathbf{R}$

2. $\sqrt{4\cos^2 x.\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x.\sin^2 y + \sin^2(x-y)} \ge 2$

Giải

1. Chọn $\begin{cases} \vec{u} = (a;b) \\ \vec{v} = (c;d) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (a+c;b+d)$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$

Hay $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

2. Chọn $\begin{cases} \vec{u} = (2\cos x.\cos y;\sin(x-y)) \\ \vec{v} = (2\sin x.\sin y;\sin(x-y)) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (2\cos(x-y);2\sin(x-y))$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$

Hay $\sqrt{4\cos^2 x.\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x.\sin^2 y + \sin^2(x-y)}$

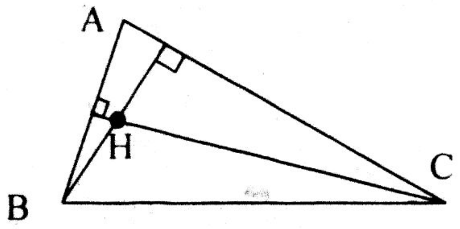
$\ge \sqrt{4\cos^2(x-y) + 4\sin^2(x-y)} = 2$

II. Dạng 2: Đường thẳng trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy

Bài 1. Cho ΔABC, đỉnh A(2; 2)

1. Lập phương trình các cạnh ΔABC. Biết rằng $9x - 3y - 4 = 0$; $x + y - 2 = 0$ lần lượt là phương trình đường cao kẻ từ B; C của ΔABC
2. Lập phương trình đường thẳng qua A và ⊥ AC ở câu 1.

* ***Chú ý**: Trực tâm H của ΔABC là giao điểm 2 đường cao.*



Giải

1. Gọi H là trực tâm ΔABC. Ta có:

BH: $9x - 3y - 4 = 0$

CH: $x + y - 2 = 0$

* Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua A(2; 2) vuông góc với đường thẳng CH: $x + y - 2 = 0$ nên có phương trình là: $1(x - 2) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

* Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua A(2; 2) vuông góc với đường thẳng BH: $9x - 3y - 3 = 0$ nên có phương trình là:

$$3(x - 2) + 9(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0$$

* Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC:

Cách 1: + Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow B\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

+ Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow C(-1; 3)$$

* Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua C(−1; 3) và nhận vectơ $\overline{BC} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là: $\dfrac{x + 1}{-\frac{5}{3}} = \dfrac{y - 3}{\frac{7}{3}}$

$$\Leftrightarrow 7(x + 1) + (y - 3)5 = 0 \Leftrightarrow 7x + 5y - 8 = 0$$

Cách 2: Tọa độ trực tâm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{6} \\ y = \dfrac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right)$$

+ Đường thẳng chứa cạnh BC qua C(−1;3) và nhận vectơ $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{7}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là:

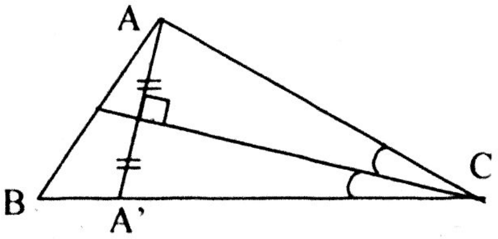
$$-\frac{7}{6}(x+1) - \frac{5}{6}(y-3) = 0 \Leftrightarrow -7x - 5y + 8 = 0$$

2. Đường thẳng (d) qua A(2;2) và vuông góc AC: $x + 3y - 8 = 0$ nên (d) có phương trình là: $3(x - 2) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 4 = 0$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có A(−1; 3), đường cao BH nằm trên đường thẳng $y = x$, đường thẳng chứa đường phân giác trong góc C là CK: $x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC ?

Chú ý: + Điểm $A'(x_A; y_A)$ đối xứng của A qua đường phân giác trong của góc C của ΔABC thuộc tia CB.

+ Điểm $A'(x_A; y_A)$ đối xứng của A qua đường phân giác ngoài của góc C của ΔABC thuộc tia đối của tia CB.



Giải

Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua A(−1; 3) vuông góc với đường cao BH: $-y + x = 0$

Do đó đường thẳng AC có phương trình là:

$1(x + 1) + 1(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

* Gọi $A'(x_A; y_A)$ là điểm đối xứng của điểm A qua đường phân giác trong góc C của ΔABC. Khi đó A' thuộc tia CB và AA' ⊥ CK

Đường thẳng AA' đi qua A(−1; 3) vuông góc với CK : $x + 3y + 2 = 0$

⇒ Phương trình đường thẳng AA' là : $3(x + 1) - 1(y - 3) = 0$

⇔ $3x - y + 6 = 0$

+ Tọa độ giao điểm E của đường thẳng AA' và đường phân giác trong góc C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-20}{10} = -2 \\ y = \dfrac{0}{10} = 0 \end{cases}$$

⇒ E (− 2; 0)

Mặt khác ta có E là trung điểm đoạn AA'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_E = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \dfrac{-1 + x_{A'}}{2} \\ 0 = \dfrac{3 + y_{A'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = -3 \end{cases}$$

Vậy A'(−3; −3)

* Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy C(4; −2).

+ Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua A'(−3; −3) và nhận vectơ $\overrightarrow{A'C} = (7; 1)$ làm vectơ chỉ phương nên đường thẳng BC có phương trình:

$$\frac{x+3}{7} = \frac{y+3}{1}$$

$\Leftrightarrow x + (-7)y - 18 = 0$

$\Leftrightarrow x - 7y - 18 = 0$

Thử lại :

Ta có A'(−3; −3) thuộc đường thẳng y = x và A'(−3; −3) thuộc đường thẳng BC

$\Rightarrow$ A'(−3; −3) thuộc đường thẳng BH : y = x , A'(−3; −3) thuộc đường thẳng BC

$\Rightarrow$ A'(−3; −3) $\equiv$ B

$\Rightarrow \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CB}$, do đó A'(−3; −3) thuộc tia CB nên tồn tại ΔABC thỏa bài toán

Vậy phương trình đường thẳng BC: x − 7y − 18 = 0

Chú ý : *Nếu $\overrightarrow{CA'}; \overrightarrow{CB}$ ngược hướng thì không tồn tại ΔABC thỏa bài toán*

Ta xét bài toán sau:

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa Oxy, cho Δ ABC có A(2; −1), đường cao BH nằm trên đường thẳng: 3x − 4y + 27 = 0, đường thẳng chứa đượng phân giác trong góc C là CK : x + 2y − 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh ΔABC?

Giải

Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua A(2; −1) vuông góc với đường cao BH: 3x − 4y + 27 = 0

Do đó đường thẳng AC có phương trình là:

$$4(x - 2) + 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$$

* Gọi A'(x_A; y_A) là điểm đối xứng của điểm A qua đường phân giác trong góc C của ΔABC. Khi đó A' thuộc tia CB và AA' $\perp$ CK.

Đường thẳng AA'đi qua A(2; −1) vuông góc với CK: x + 2y + 2 = 0

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AA' là: 2(x − 2) − 1(y + 1) = 0

$\Leftrightarrow$ 2x − y − 5 = 0

+ Tọa độ giao điểm E của đường thẳng AA' và đường phân giác trong góc C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-y-5=0\\x+2y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ E(3; 1)

Mặt khác ta có E là trung điểm đoạn AA'

$$\Rightarrow\begin{cases}x_E=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2}\\y_E=\dfrac{y_A+y_{A'}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3=\dfrac{2+x_{A'}}{2}\\1=\dfrac{-1+y_{A'}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{A'}=4\\y_{A'}=3\end{cases}$$

Vậy A'(4; 3)

* Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x+2y-5=0\\4x+3y-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$$

Vậy C(−1; 3)

+ Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua C(−1; 3) và nhận vectơ $\overrightarrow{CA'}=(5;0)$ làm vectơ chỉ phương nên đường thẳng BC có phương trình:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{0}$$

$\Rightarrow$ $y-3=0$ (phương trình tổng quát của đường thẳng BC)

Ta có tọa độ điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}3x-4y+27=0\\y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\y=3\end{cases}$$

Vậy B(−5; 3)

Khi đó $\overrightarrow{CB}=(-4;0)=-\frac{4}{5}\overrightarrow{CA'}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{CA'};\overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên A' thuộc tia đối tia CB

Vậy không tồn ΔABC thỏa bài toán

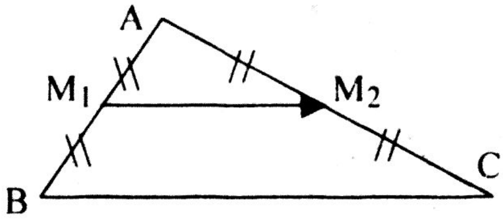
Chú ý : *Nếu bạn đọc không kiểm tra điều kiện này sẽ kết luận :*

ΔABC có B(−5;3) ,C(−1; 3) thì kết luận này sai.

Vì CK : $x + 2y - 5 = 0$ là đường phân giác ngoài của góc C của ΔABC có A(2; −1), B(−5;3) ,C(−1; 3)

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$, $M_3(3; -4)$. Biết ba trung điểm của ba cạnh của một tam giác lần lượt là M_1, M_2, M_3. Hãy lập phương trình của các đường thẳng chứa các cạnh tam giác đó?

* ***Chú ý:*** *Vectơ tạo từ 2 trung điểm của 2 cạnh một tam giác là một véctơ chỉ phương của đường thẳng chứa cạnh còn lại*



Giải

Bài toán không mất tính tổng quát, giả sử tam giác thỏa bài toán là ΔABC và gọi $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$, $M_3(3; -4)$ lần lượt là các trung điểm của cạnh AB; AC; BC của ΔABC.

* Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua $M_1(2; 1)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{M_3M_2} = (2; 7)$ làm vectơ chỉ phương, nên có phương trình

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7}$$

$$\Rightarrow 7x - 2y - 12 = 0$$

* Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua $M_2(5; 3)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{M_1M_3} = (1; -5)$ làm vectơ chỉ phương, nên có phương trình

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-5}$$

$$\Rightarrow 5x + y - 28 = 0$$

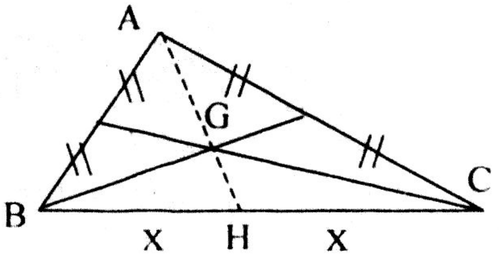
* Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua $M_3(3; -4)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{M_1M_2} = (3; 2)$ làm vectơ chỉ phương, nên có phương trình:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+4}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 3y - 18 = 0$$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa Oxy, cho A(1; 3). Lập phương trình của các cạnh ΔABC. Biết hai đường thẳng chứa hai đường trung tuyến có phương trình là: $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.

* ***Chú ý**: Giao điểm 2 đường trung tuyến là trọng tâm của tam giác.*



Giải

Ta có tọa độ điểm A không thỏa phương trình: $y - 1 = 0$; $-2y + x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ Hai đường thẳng chứa hai đường trung tuyến có phương trình là:

$x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$ không có đường thẳng nào đi qua A(1; 3)

Bài toán không mất tính tổng quát, giả sử hai đường trung tuyến $y - 1 = 0$ và $x - 2y + 1 = 0$ lần lượt đi qua B; C

Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow G(1; 1)$$

Gọi $H(x_H; y_H)$ là trung điểm cạnh BC

Ta có: $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GH}$

Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AG} = (0; -2) \\ \overrightarrow{GH} = (x_H - 1; y_H - 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 1) = 0 \\ 2(y_H - 1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(1; 0)$$

Cách 1: (Tìm tọa độ điểm B;C)

Mặt khác: $\begin{cases} x_H = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_H = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} \dfrac{x_B + x_C}{2} = 1 \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 - x_C \\ y_B = -y_C \end{cases} \Leftrightarrow B(2 - x_C; -y_C)$

+ Điểm B thuộc đường thẳng $y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -y_C - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow y_C = -1$

+ Điểm $C(x_C; y_C)$ thuộc đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_C - 2y_C + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow x_C = -3$

Khi đó $\begin{cases} x_B = 2 - (-3) = 5 \\ y_B = 1 \end{cases}$

Vậy $B(5; 1)$, $C(-3; -1)$

Cách 2: (Tìm tọa độ điểm B;C)

+ Điểm $B(x_B; y_B)$ thuộc trung tuyến $y - 1 = 0 \Rightarrow y_B = 1$

+ Điểm $C(x_C; y_C)$ thuộc trung tuyến $x - 2y + 1 = 0$

$\Rightarrow x_C - 2y_C + 1 = 0 \qquad (1)$

Mà $y_H = \dfrac{y_B + y_C}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow y_C = -y_B = -1 \qquad (2)$

Thay (2) vào (1) ta được:

$x_C = -3 \quad \Rightarrow C(-3; -1)$

Ta có: $\dfrac{x_B + x_C}{2} = x_H$

$\Leftrightarrow x_B = 2x_H - x_C = 2 - (-3) = 5 \quad \Leftrightarrow B(5; 1)$

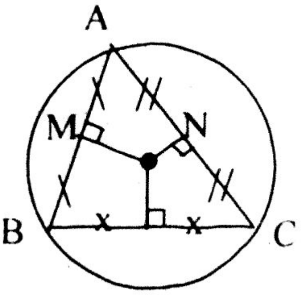
* Đường thẳng AC đi qua A(1; 3) và nhận $\overrightarrow{AC} = (-4; -4)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình: $\dfrac{x - 1}{-4} = \dfrac{y - 3}{-4}$ hay $x - y + 2 = 0$

* Đường thẳng AB đi qua A(1; 3) và nhận $\overrightarrow{AB} = (4; -2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2}$ hay $x + 2y - 7 = 0$

* Đường thẳng BC đi qua C(−3; −1)) và nhận $\overrightarrow{CB} = (8; 2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình: $\frac{x+3}{8} = \frac{y+1}{2}$ hay $x - 4y - 1 = 0$

Bài 5. Viết phương trình các đường trung trực của các cạnh của ΔABC, biết trung điểm của các cạnh của ΔABC là M(−1; −1), N(1; 9), P(9; 1). Tính tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC?

Chú ý: Giao điểm của 2 đường trung trực của 2 cạnh của một tam giác là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.



Giải

Bài toán không mất tính tổng quát, giả sử gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

* Đường trung trực (Δ_1) của cạnh AB đi qua M(−1; −1) và nhận vectơ $\overrightarrow{NP} = (8; -8)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$8(x + 1) - 8(y + 1) = 0$$

Hay $x - y = 0$

* Đường trung trực (Δ_2) của cạnh AC đi qua N(1; 9) và nhận vectơ $\overrightarrow{MP} = (10; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$10(x - 1) + 2(y - 9) = 0$$

Hay $5x + y - 14 = 0$

* Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình :

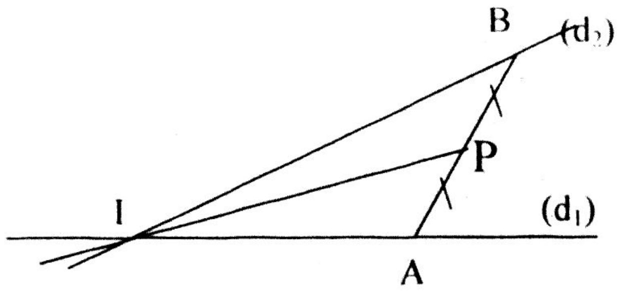
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 5x + y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow I(\frac{7}{3}; \frac{7}{3})$$

(Bạn đọc viết tương tự (Δ_1) ; (Δ_2) cho đường trung trực cạnh BC)

Bài 6. Cho P(3; 0) và hai đường thẳng (d_1): $2x - y - 2 = 0$ và (d_2): $x + y + 3 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (d) với (d) là đường thẳng qua P(3; 0) và (d) cắt (d_1) và (d_2) lần lượt tại A; B; biết PA = PB.

Chú ý: Cần xét hai trường hợp:

+ $A \equiv B \equiv I \equiv (d_1) \cap (d_2)$
+ P là trung điểm đoạn AB



Giải

Ta có (d_1) cắt (d_2) tại I có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow I(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{3})$$

Ta có $P \notin (d_1)$, $P \notin (d_2)$

Trường hợp 1: $A \equiv B \equiv I$ (thỏa mãn PA = PB)

Khi đó đường thẳng (d) cần tìm qua điểm P(3; 0) và $I\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{8}{3}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PI} = (-\frac{10}{3}; -\frac{8}{3}) = -\frac{2}{3}(5; 4)$$

$\Rightarrow \vec{u} = (5; 4)$ là 1 véctơ chỉ phương của (d).

$\Rightarrow$ Phương trình (d) là: $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y}{4} \Leftrightarrow 4x - 5y - 12 = 0$

Trường hợp 2: PA = PB (A, B không trùng I)

$\Rightarrow$ P là trung điểm đoạn AB. Gọi $B(x_B; y_B)$

$$\text{Ta có} \begin{cases} \dfrac{x_B + x_A}{2} = 3 \\ \dfrac{y_B + y_A}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 6 - x_B \\ y_A = -y_B \end{cases} \Leftrightarrow A(6 - x_B; -y_B)$$

Ta có $A \in (d_1)$; $B \in (d_2)$ nên $\begin{cases} 2(6 - x_B) + y_B - 2 = 0 \\ x_B + y_B + 3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B + y_B + 3 = 0 \\ -2x_B + y_B + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{7}{3} \\ y_B = -\dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow B(\frac{7}{3}; -\frac{16}{3})$$

Đường thẳng (d) cần tìm qua P(3; 0) và $B\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{16}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BP} = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng (d).

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (d) : $\frac{16}{3}(x-3)-\frac{2}{3}(y-0)=0$

Hay $8x - y - 24 = 0$

Mở rộng:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình đường thẳng qua P(3: 0) cắt (d_1): $2x - y - 2 = 0$ và (d_2): $x + y + 3 = 0$ lần lượt tại A; B sao cho P chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k = 3$ ($\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB}$).

Giải

Ta có: $\begin{cases} x_P = \dfrac{x_A - 3x_B}{1-3} \\ y_P = \dfrac{y_A - 3y_B}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \dfrac{x_A - 3x_B}{-2} \\ 0 = \dfrac{y_A - 3y_B}{-2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B - 6 \\ y_A = 3y_B \end{cases}$

$A(3x_B - 6; 3y_B) \in (d_1): 2x - y - 2 = 0$ và $B(x_B; y_B) \in (d_2): x + y + 3 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(3x_B - 6) - 3y_B - 2 = 0 \\ x_B + y_B + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_B - 3y_B - 14 = 0 \\ x_B + y_B + 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{5}{9} \\ y_B = \dfrac{-32}{9} \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{5}{9}; \dfrac{-32}{9}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) qua P(3; 0) và nhận $\overrightarrow{BP} = \left(\dfrac{22}{9}; \dfrac{32}{9}\right)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình đường thẳng (Δ) là:

$$\frac{x}{\frac{22}{9}} = \frac{y}{\frac{32}{9}} \Rightarrow \frac{x-3}{11} = \frac{y}{16}$$

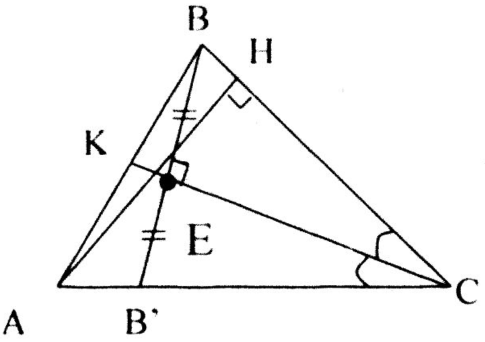
$\Rightarrow 16x - 11y - 48 = 0$

Chú ý: *Bạn đọc có thể giải tương tự như trên cho bài toán tổng quát sau:*

"Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình đường thẳng qua P(3; 0) cắt (d_1): $2x - y - 2 = 0$ và (d_2): $x + y + 3 = 0$ lần lượt tại A; B sao cho P chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \in R, k \neq 1$"

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình các cạnh của ΔABC biết B(2; −1); các đường thẳng chứa đường cao và đường phân giác lần lượt qua A và C có phương trình $3x - 4y - 3 = 0$; $x + 2y - 5 = 0$.

Chú ý: Điểm B' đối xứng với B qua đường phân giác trong góc C của ΔABC thuộc tia CA.



Giải

Đường cao AH: $3x - 4y - 3 = 0$

Đường phân giác CK: $x + 2y - 5 = 0$

+ Đường thẳng BC qua B(2; −1) và BC ⊥ AH

nên phương trình đường thẳng BC là: $4(x - 2) + 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua đường phân giác CK

$\Rightarrow$ B' $\in$ tia CA và phương trình đường thẳng BB' là:

$2(x - 2) - 1(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$ (vì BB' ⊥ CK)

Gọi E là giao điểm của đường thẳng BB' và phân giác CK $\Rightarrow$ E là trung điểm đoạn BB' và tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{5} = 3 \\ y = \dfrac{5}{5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow E(3;1)$$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x_B + x_{B'}}{2} = x_E \\ \dfrac{y_B + y_{B'}}{2} = y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 2x_E - x_B = 6 - 2 = 4 \\ y_{B'} = 2y_E - y_B = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

Vậy B'(4; 3)

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5}{5} = -1 \\ y = \dfrac{15}{5} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow C(-1;3)$$

Vậy C(−1; 3)

+ Đường thẳng AC qua B'(4; 3) và C(−1; 3) nên nhận $\overrightarrow{CB'} = (5;0)$ làm vectơ chỉ phương do đó phương trình đường thẳng AC là:

$0(x + 1) - 5(y - 3) = 0 \Leftrightarrow y - 3 = 0$

+ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - 3 = 0 \\ 3x - 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A(5;3)$$

Khi đó $\overrightarrow{CA} = (6;0) = \frac{6}{5}\overrightarrow{CB'}$

⇒ $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CB'}$ cùng hướng ⇒ B' thuộc tia CA

⇒ Vậy tồn tại ΔABC thỏa bài toán.

Đường thẳng AB qua A(5; 3) và B(2; −1) nên nhận véc tơ $\overrightarrow{AB} = (-3;-4)$ làn vectơ chỉ phương; do đó phương trình đường thẳng AB là: $4(x-2) - 3(y+1) = 0$

⇔ $4x - 3y - 11 = 0$

Vậy AB: $4x - 3y - 11 = 0$

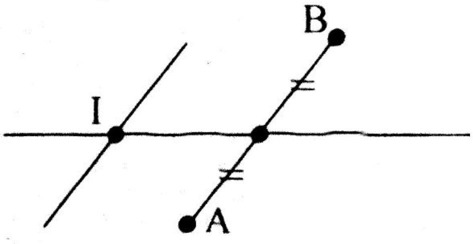
AC: $y - 3 = 0$

BC: $4x + 3y - 5 = 0$

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình đường thẳng (Δ) qu I(− 2; 3) và cách đều A(5; − 1), B(3; 7)

Chú ý*: *+ Đường thẳng (Δ) cách đều A,B ⇔ d(A ,Δ) = d(B,Δ)

Cách 1: (Δ) qua I và (Δ) cách đều A,B ⇔ (Δ) qua I và qua trung điểm M của đoạn AB hoặc (Δ) qua I và (Δ) // AB.



Cách 2: Dùng phương trình đường thẳng qua một điểm dạng:

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = 0 \quad (A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$$

Tìm A_1, B_1 từ điều kiện d(A,Δ) = d(B,Δ).

Giải

Cách 1: Đường thẳng (Δ) qua I và cách đều A, B có hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: (Δ) qua I(−2; 3) và (Δ) // AB.

⇒ $\overrightarrow{AB} = (-2; 8)$ là một vectơ chỉ phương của (Δ)

⇒ Phương trình đường thẳng (Δ) là: $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{8}$

Hay $4x + y + 5 = 0$

+ Trường hợp 2: (Δ) qua I và qua trung điểm M(4; 3) của đoạn AB

⇒ $\overrightarrow{IM} = (6; 0)$ là một vectơ chỉ phương của (Δ)

⇒ Phương trình đường thẳng (Δ) là: $\frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{0}$

Hay: $y - 3 = 0$

Cách 2: Phương trình đường thẳng (Δ) qua I(−2; 3) là:

$$A_1(x+2) + B_1(y-3) = 0 \qquad (A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$$

Theo đề bài, ta có: d(A, (Δ)) = d(B, (Δ))

$$\Rightarrow \frac{|7A_1 - 4B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|5A_1 + 4B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

$$\Rightarrow |7A_1 - 4B_1| = |5A_1 + 4B_1|$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7A_1 - 4B_1 = 5A_1 + 4B_1 \\ 7A_1 - 4B_1 = -5A_1 - 4B_1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2A_1 - 8B_1 = 0 \\ 12A_1 = 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = 4B_1 \\ A_1 = 0 \end{array}\right.$$

* Với $A_1 = 4B_1$ $\Rightarrow B_1 \neq 0$ vì $(A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) là:

$4B_1(x + 2) + B_1(y - 3) = 0$

$\Rightarrow 4x + y + 5 = 0$ (vì $B_1 \neq 0$)

* Với $A_1 = 0$ $\Rightarrow B_1 \neq 0$ vì $(A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) là:

$B_1(y - 3) = 0$ $\Rightarrow y - 3 = 0$ (vì $B_1 \neq 0$)

Bài 9. Viết phương trình đường thẳng (Δ') qua A(0; 1) và tạo với đường thẳng $(\Delta): x + 2y + 3 = 0$ một góc 45^0.

Giải

Phương trình đường thẳng (Δ') qua A(0; 1) có dạng:

$A_1(x - 0) + B_1(y - 1) = 0$; $(A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$

Ta có: $\overrightarrow{n_1} = (1; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của (Δ)

$\overrightarrow{n_2} = (A_1; B_1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Δ')

$$\Rightarrow \cos 45^0 = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|A_1 + 2B_1|}{\sqrt{5}.\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}.\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{2}|A_1 + 2B_1|$$

$$\Rightarrow 5(A_1^2 + B_1^2) = 2(A_1 + 2B_1)^2$$

$$\Rightarrow 3A_1^2 - 8A_1B_1 - 3B_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = 3B_1 \\ A_1 = -\frac{1}{3}B_1 \end{array}\right.$$

* Với $A_1 = 3B_1$ $\Rightarrow B_1 \neq 0$ vì $(A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ') là:

$3B_1x + B_1(y - 1) = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 1 = 0$ (vì $B_1 \neq 0$)

* Với $A_1 = -\dfrac{1}{3}B_1 \Rightarrow B_1 \neq 0$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ') là:

$$-\frac{1}{3}B_1x + B_1(y - 1) = 0$$

$\Rightarrow -x + 3y - 3 = 0$ (vì $B_1 \neq 0$)

Vậy phương trình đường thẳng (Δ') là: $3x + y - 1 = 0$

hoặc $-x + 3y - 3 = 0$

Bài 10. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng (Δ): $3x - 4y + 1 = 0$ và có khoảng cách đến đường thẳng (Δ) bằng 1.

Chú ý: *Đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng (Δ') ta có: $d(\Delta, \Delta') = d(M, \Delta')$ với $M \in (\Delta)$.*

Giải

Đường thẳng $(\Delta') // (\Delta)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ') là:

$3x - 4y + C = 0$ $(C \neq 1)$

Ta có: $M(1; 1) \in (\Delta) \Rightarrow d(\Delta, \Delta') = d(M, \Delta')$

Mặt khác, theo đề ra ta có: $d(\Delta, \Delta') = 1$

$\Rightarrow d(M, \Delta') = 1$

$$\Rightarrow \frac{|3 - 4 + C|}{5} = 1 \qquad \Rightarrow \frac{|C - 1|}{5} = 1$$

$$\Rightarrow |C - 1| = 5 \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = 6 \\ C = -4 \end{array}\right.$$

Do đó phương trình đường thẳng (Δ') là:

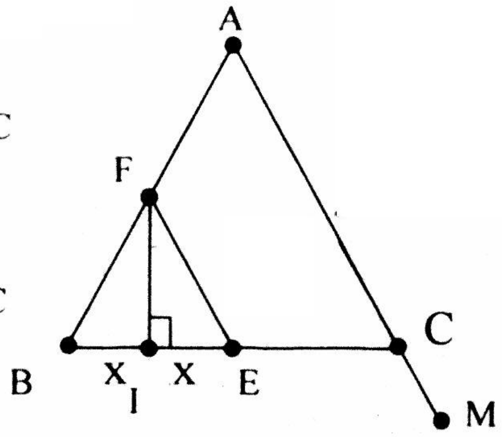
$3x - 4y + 6 = 0$ hoặc $3x - 4y - 4 = 0$

Bài 11. Một tam giác cân có cạnh đáy và một cạnh bên có phương trình lần lượt là $3x - y + 5 = 0$ và $x + 2y - 1 = 0$. Lập phương trình cạnh bên còn lại biết nó đi qua điểm $M(1; -3)$.

Chú ý: *I là điểm trên cạnh đáy của ΔABC cân tại A. Đường thẳng (Δ) qua I và $(\Delta) \perp BC$: (Δ) cắt AB tại F, I là trung điểm đoạn BE $\Rightarrow$ EF // AC.*

Giải

Cách 1:



Không mất tính tổng quát, giả sử xét ΔABC cân tại A có phương trình các đường thẳng BC: $3x - y + 5 = 0$ và AB: $x + 2y - 1 = 0$

Ta có: $I(-1; 2)$ thuộc đường thẳng BC

Đường thẳng (Δ) qua $I(-1; 2)$ và vuông góc BC

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) là:

$1(x + 1) + 3(y - 2) = 0$

Hay $x + 3y - 5 = 0$

+ Tọa độ giao điểm F của AB và (Δ) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow F(-7; 4)$$

Ta có tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{9}{7} \\ y = \dfrac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow B\left(-\frac{9}{7}; \frac{8}{7}\right)$$

Gọi E là điểm đối xứng với B qua I (I là trung điểm BE)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \dfrac{x_B + x_E}{2} = -1 \\ \dfrac{y_B + y_E}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -2 - x_B = -\dfrac{5}{7} \\ y_E = 4 - y_B = \dfrac{20}{7} \end{cases} \Leftrightarrow E\left(-\frac{5}{7}; \frac{20}{7}\right)$$

Ta có: EF//AC

Đường thẳng AC đi qua $M(1; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{EF}\left(-\frac{44}{7}; \frac{8}{7}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường AC là: $\dfrac{x - 1}{-\dfrac{44}{7}} = \dfrac{y + 3}{\dfrac{8}{7}}$

$\Leftrightarrow (x - 1)2 = -11(y + 3) \Leftrightarrow 2x + 11y + 31 = 0$

Cách 2:

Không mất tính tổng quát, xét ΔABC cân tại A

BC: $3x - y + 5 = 0$

AB: $x + 2y - 1 = 0$

* Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC qua $M(1; -3)$ có dạng:

$A(x + 1) + B(y + 3) = 0$

Điều kiện: $A^2 + B^2 \neq 0$

Do ΔABC cân tại A $\Rightarrow B = C \in (0^0; 90^0)$ $\Rightarrow \cos B = \cos C$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{u_{AB}}.\overrightarrow{u_{BC}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{AB}}\right|.\left|\overrightarrow{u_{BC}}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{u_{BC}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{AC}}\right|.\left|\overrightarrow{u_{BC}}\right|} \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{u_{AB}}.\overrightarrow{u_{BC}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{AB}}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{u_{AC}}.\overrightarrow{u_{BC}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{AC}}\right|} \qquad (*)$$

với $\begin{cases}\overrightarrow{u_{AB}}=(2;-1) \text{ vectơ chỉ phương của đường thẳng AB}\\ \overrightarrow{u_{BC}}=(1;3) \text{ vectơ chỉ phương của đường thẳng BC}\\ \overrightarrow{u_{AC}}=(B;-A) \text{ vectơ chỉ phương của đường thẳng AC}\end{cases}$

Ta có (*) $\Leftrightarrow \dfrac{|2-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|B-3A|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{5}|B-3A| \Leftrightarrow A^2+B^2=5(B-3A)^2$$

$$\Leftrightarrow 4B^2-30AB+44A^2=0 \qquad (\Delta'=49A^2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} B=\frac{11}{2}A & (A\neq 0)\\ B=2A & (A\neq 0)\end{array}\right.$$

*** Trường hợp 1**: $B=\dfrac{11}{2}A$

$\Rightarrow$ Đường thẳng AC: $A(x-1)+\dfrac{11}{2}A(y+3)=0;\quad (A\neq 0)$

$\Rightarrow\quad 2x+11y+31=0$ (thỏa mãn điều kiện)

*** Trường hợp 2**: $B=2A$

$\Rightarrow$ Đường thẳng AC: $A(x-1)+2A(y+3)=0;\quad (A\neq 0)$

$\Rightarrow$ $x+2y+5=0$ (loại) (vì song song với đường thẳng AB)

(vì $\vec{n}=(1;2)$)

Bài 12. Hai cạnh của một tam giác có phương trình:

$$5x-2y+6=0 \text{ và } 4x+7y-21=0.$$

Viết phương trình cạnh thứ 3 của một tam giác có trực tâm trùng gốc tọa độ O(0; 0)

Giải

Bài toán không mất tính tổng quát, giả sử

AB: $5x-2y+6=0$ và AC: $4x+7y-21=0$

+ Đường thẳng (Δ_1) chứa đường cao BO qua O(0;0) và $\perp$ AC nên có phương trình: $7(x-0)-4(y-0)=0 \Leftrightarrow 7x-4y=0$

. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}7x-4y=0\\5x-2y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{24}{6}=-4\\ y=-7\end{cases}$$

Cách 1: Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 5x - 2y + 6 = 0 \\ 4x + 7y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{0}{43} = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A(0; 3)$$

Đường thẳng chứa cạnh BC qua B(– 4; – 7) và nhận $\overrightarrow{OA}$ (0; 3) làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$0(x + 4) + 3(y + 7) = 0 \Leftrightarrow y + 7 = 0$$

Cách 2: + Viết phương trình đường cao CO ⇒ Tọa độ điểm C

+ Phương trình đường thẳng chứa cạnh BC qua B và có vectơ $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ chỉ phương ⇒ Kết quả.

Bài 13: Lập phương trình các cạnh ΔABC, biết B(– 4; – 5) và hai đường cao có phương trình: $5x + 3y - 4 = 0$ (1); $3x + 8y + 13 = 0$ (2)

Giải

- Tọa độ điểm B không thỏa mãn phương trình (1) và (2)

- Do đó hai đường cao đã cho không có đường cao nào kẻ từ B. Bài toán không mất tính tổng quát, giả sử đường cao kẻ từ A có phương trình (1); đường cao kẻ từ C có phương trình (2)

. **Khi đó**: + Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua B(–4; –5) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{u_C} = (8; -3)$, (với $\overrightarrow{u_C}$: là một vectơ chỉ phương của đường cao kẻ từ C nên có phương trình:

$$8(x + 4) - 3(y + 5) = 0 \Leftrightarrow 8x - 3y + 17 = 0$$

+ Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua B và nhận $\overrightarrow{u_A} = (3; -5)$, (với $\overrightarrow{u_A}$ là một vectơ chỉ phương của đường cao kẻ từ A làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$3(x + 4) - 5(y + 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - 13 = 0$$

* Viết phương trình cạnh AC:

Cách 1: Tìm A; C

+ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8x - 3y + 17 = 0 \\ 5x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A(-1; 3)$$

+ Toạ độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 8y + 13 = 0 \\ 3x - 5y - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow C(1; -2)$$

⇒ Đường thẳng AC qua A(–1; 3) và nhận $\overrightarrow{AC} = (2; -5)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow 5x + 2y - 1 = 0$$

Cách 2: Tìm A, trực tâm H

+ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}8x-3y+17=0\\5x+3y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}\Leftrightarrow A(-1;3)$$

+ Tọa độ trực tâm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}5x+3y-4=0\\3x+8y+13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{71}{31}\\y=-\dfrac{77}{31}\end{cases}\Leftrightarrow H\left(\frac{71}{31};-\frac{77}{31}\right)$$

Ta có: $\overline{HB}=\left(-\dfrac{195}{31};-\dfrac{78}{31}\right)=-\dfrac{39}{31}(5;2)$

⇒ Đường thẳng AC qua A(−1; 3) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(5;2)$ nên phương trình AC là:

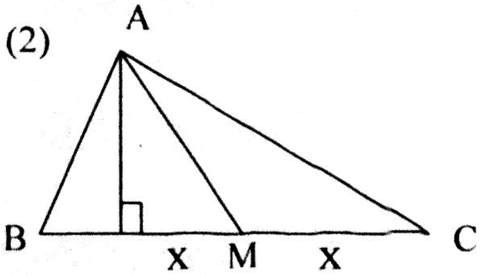
$$5(x+1)+2(y-3)=0\Leftrightarrow 5x+2y-1=0$$

Bài 14: Lập phương trình các cạnh ΔABC, biết C(4; −1), đường cao và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh ΔABC có phương trình lần lượt là:

$$2x-3y+3=0\ (1);\quad 2x+3y=0\ (2)$$

Chú ý: *Giải hệ (1) và (2) ⇒ Toạ độ một đỉnh của tam giác*

Giải



- Tọa độ điểm C không thỏa phương trình (1) và (2)
- Do đó đường cao và đường trung tuyến đã cho không kẻ từ C. Bài toán không mất tính tổng quát, giả sử đường cao và đường trung tuyến đã cho kẻ từ A, tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-3y+12=0\\2x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}\Leftrightarrow A(-3;2)$$

+ Đường thẳng AC qua A(−3; 2) và nhận $\overrightarrow{AC}=(7;-3)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình:

$$\frac{x+3}{7}=\frac{y-2}{-3}\Leftrightarrow 3x+7y-5=0$$

+ Đường thẳng BC đi qua C(4; −1) và nhận $\overrightarrow{u_A}=(3;2)$, (với $\overrightarrow{u_A}$ là một vectơ chỉ phương của đường cao kẻ từ A) làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$3(x-4)+2(y+1)=0\Leftrightarrow 3x+2y-10=0$$

Tọa độ trung điểm M của cạnh BC của ΔABC là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x+2y-10=0\\2x+3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=-4\end{cases}\Leftrightarrow M(6;-4)$$

Khi đó: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 12 - 4 = 8 \\ y_M = 2y_M - y_C = -8 + 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow B(8; -7)$

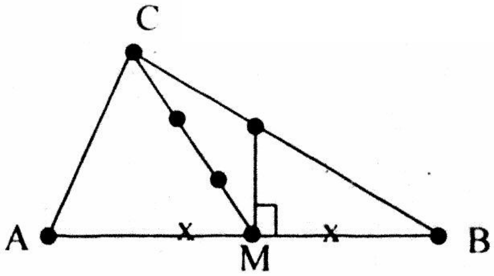
Đường thẳng AB qua A(−3; 2) và nhận $\overrightarrow{AB} = (11; -9)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình:

$$\frac{x+3}{11} = \frac{y-2}{-9} \Leftrightarrow 9x + 11y + 5 = 0$$

Bài 15: Cho ΔABC có A(−1; −3). Biết một đường trung trực cạnh AB có phương trình: 3x + 2y − 4 = 0, trọng tâm ΔABC là G(4; −2). Viết phương trình các cạnh ΔABC.

Chú ý: *Biết trọng tâm G và tính được trung điểm M của cạnh AB ⇒ tọa độ đỉnh C từ hệ thức* $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GM}$

⇒ phương trình cạnh AC: có A; M ⇒ điểm B ⇒ phương trình BC



Giải

Đường trung trực (Δ) của cạnh AB có phương trình 3x + 2y − 4 = 0

+ Đường thẳng AB qua A(−1; −3) và vuông góc đường trung trực cạnh AB nên phương trình đường thẳng AB là:

$$2(x+1) - 3(y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 7 = 0$$

+ Tọa độ trung điểm M của cạnh AB là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 7 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{26}{3} = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow M(2; -1)$$

Ta có: $\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 5 \\ y_B = 2y_M - y_A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow B(5; 1)$

Mặt khác, ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 3x_G - (x_A + x_B) = 12 - 4 = 8 \\ y_C = 3x_G - (y_A + y_B) = -6 + 2 = -4 \end{cases} \Rightarrow C(8; -4)$$

+ Đường thẳng AC qua $A(-1; -3)$ và nhận $\overrightarrow{AC} = (9; -1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình:

$$\frac{x+1}{9} = \frac{y+3}{-1} \Leftrightarrow x + 9y + 28 = 0$$

+ Đường thẳng BC qua $A(5; 1)$ và nhận $BC = (3; -5)$ làm véctơ chỉ phương nên có phương trình:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{-5} \Leftrightarrow 5x + 3y + 22 = 0$$

Bài tập tương tự

Bài 1: Cho ΔABC có $A(3; 1)$; $B(1; -3)$; diện tích $S = 3$ và có trọng tâm G thuộc trục Ox. Tìm tọa độ điểm G; C?

Bài 2: Cho ΔABC có $A(-3; 6)$; $B(1; -2)$ và $C(6; 3)$

a. Tính tọa độ trọng tâm G; trực tâm H; tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b. Chứng minh $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

c. Tính tọa độ chân đường cao kẻ từ A của ΔABC.

Bài 3: Tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(3; 4)$; $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$

a. (d) là đường thẳng qua A và song song với Oy. Tính góc giữa (d) và đường thẳng AB.

b. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của ΔABC.

Bài 4: Cho $A(1; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(-1; 4)$, $D(3; 5)$, (Δ): $3x - y - 5 = 0$. Tìm M thuộc (Δ) sao cho ΔMAB và ΔMCD có diện tích bằng nhau.

Bài 5: Cho $A(0; 1)$, $B(2; -4)$. Tìm M thuộc trục Oy cho biết góc $\widehat{AMB} = 45^0$

Bài 6: Cho $A(1; 1)$, $B(2; 3)$.

a. Tìm tọa độ điểm C để ΔABC vuông ở A, biết $x_C = 5$.

b. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

c. Tính cosin của góc nhọn tạo bởi hai đường chéo của hình chữ nhật.

Bài 7: Cho ΔABC có độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c. Hãy tính theo a, b, c tích vô hướng $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$ với D là trung điểm cạnh BC.

Bài 8: Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(2; -1)$ và hợp với trục hoành Ox một góc 30^0.

Bài 9: Đường thẳng (Δ) qua $M(1; 2)$ và chắn đến hai trục tọa độ hai đoạn thẳng bằng nhau. Hãy viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ).

Bài 10: Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(-1; 1)$ và tạo với đường thẳng $2x + 3y - 6 = 0$ một góc 45^0.

Bài 11: Viết phương trình đường thẳng đi qua A(2; 4) và cách gốc tọa độ O(0;0) một khoảng bằng 4.

Bài 12: Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ O(0;0) và tạo với hai đường thẳng $x + y = a$ và $x = 0$ một tam giác có diện tích bằng a^2.

Bài 13: Cho A(−4; 0); B(0; 6) viết phương trình đường thẳng đi qua trung điểm cu đoạn AB và có đoạn chắn trên trục hoành bằng hai lần đoạn chắn trên trục tung.

Bài 14: Cho ΔABC, trong đó phương trình cạnh AB là: $3x + 2y = 12$. Hai đường cao kẻ từ B; A lần lượt nằm trên hai đường thẳng có phương trình: $x + 2y = 4$; $4x + y = 6$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh ΔABC và đường cao của ΔABC.

Bài 15: Cho ΔABC có A(−5; 2). Biết đường cao AH: $3x - y + 7 = 0$ và trung tuyến AM: $7x + y - 17 = 0$. Lập phương trình các đường thẳng lần lượt chứa các cạnh ΔABC.

Bài 16: Viết phương trình đường thẳng qua M(0; 1) và cắt (d_1): $x - 3y + 10 = 0$, (d_2): $2x + y - 8 = 0$ lần lượt tại A, B sao cho PA = PB.

Bài 17: Hai cạnh của hình bình hành có phương trình là: $y = x - 2$ và $5y = x + 6$. Tìm phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành. Biết rằng các đường chéo của nó cắt nhau tại gốc tọa độ O(0; 0).

Bài 18: Cho hình chữ nhật ABCD biết hai cạnh có phương trình: $3x - 2y - 5 = 0$ và $2x + 3y + 7 = 0$, A(−2; 1). Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D và giao điểm hai đường chéo.

Bài 19: Cho ΔABC, biết ba cạnh có phương trình là: $x - y - 2 = 0$, $3x - y + 1 = 0$ và $x - 4y - 1 = 0$. Viết phương trình các đường cao của ΔABC. Tìm tọa độ trực tâm ΔABC.

Bài 20: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy

1. Lập phương trình đường thẳng (Δ) qua A(8; 6) và tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 12.
2. Lập phương trình đường thẳng (d) qua M(3; 1) và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A, B (A, B không trùng O(0; 0)) sao cho tổng OA + OB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

1. Đường thẳng (Δ) cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a.b \neq 0)$$

Theo đề ra ta có: $\begin{cases} \dfrac{8}{a} + \dfrac{6}{b} = 1 \\ \dfrac{1}{2}|a||b| = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{a} + \dfrac{6}{b} = 1 \quad (1) \\ |ab| = 24 \quad (2) \end{cases}$

Ta có (2): $\Leftrightarrow ab = 24$ hoặc $ab = -24 \Leftrightarrow \dfrac{b}{3} = \dfrac{8}{a}$ hoặc $\dfrac{b}{-3} = \dfrac{8}{a}$ (vì $a.b \neq 0$

* Với $\frac{b}{3} = \frac{8}{a}$, từ (1) $\Rightarrow \frac{b}{3} + \frac{6}{b} = 1$

$$\Rightarrow b^2 - 3b + 18 = 0$$ Phương trình vô nghiệm.

*Với $\frac{b}{-3} = \frac{8}{a}$, từ (1) $\Rightarrow \frac{b}{-3} + \frac{6}{b} = 1$

$$\Rightarrow b^2 + 3b - 18 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = -6; (a = 4) \\ b = 3; (a = -8) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (\Delta): \frac{x}{-8} + \frac{y}{3} = 1 \text{ hay } (\Delta): \frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1$$

2. Bài toán không mất tính tổng quát, giả sử A(a; 0), B(0; b), a > 0, b > 0

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (d) là: $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1$

Do M(3; 1) $\in$ (d) nên ta có: $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{a}{a-3} > 0 \Rightarrow a > 3$

Mặt khác, ta có: $OA + OB = a + b = a + \frac{a}{a-3} = \frac{a^2 - 2a}{a-3}$ $(a > 3)$

Xét hàm số: $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$

Ta có: $y' = \frac{x^2 - 6x + 6}{(x-3)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 3 + \sqrt{3}; (y = 4 + 2\sqrt{3}) & \\ x = 3 - \sqrt{3} & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của y = f(x) là:

x	$-\infty$		$4 + 2\sqrt{3}$		
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$4 + 2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy f(x) đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4 + 2\sqrt{3}$ khi $x = 3 + \sqrt{3} > 3$

Vậy $OA + OB = \frac{a^2 - 2a}{a - 3}$ $(a > 3)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4 + 2\sqrt{3}$ khi $a = 3 + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow b = \frac{a}{a-3} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$$

Khi đó phương trình đường thẳng (d): $\frac{x}{3 + \sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3} + 1} = 1$

Vấn đề II
ĐƯỜNG TRÒN

A Ghi nhớ:

I. Phương trình đường tròn:

1. Đường tròn tâm I(a;b), bán kính R(R>0) có phương trình là:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2} \qquad (1)$$

2. Phương trình: $\boxed{x^2+y^2+2Ax+2By+C=0}$ *(2)(với* $A^2+B^2-C>0$*) là phương trình đường tròn có tâm* $I(-A;-B)$*; bán kính* $R=\sqrt{A^2+B^2-C}$

II. Chú ý:

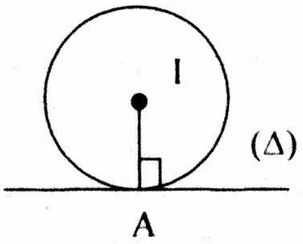
1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm I cạnh huyền và bán kính $R=\frac{1}{2}$ *cạnh huyền*

2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đều có tâm là trọng G của ΔABC *và bán kính* $R=GA$

3. Đường tròn C(I, R) tiếp xúc đường thẳng $(\Delta) \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

** Đường tròn C(I,R)) tiếp xúc đường thẳng* (Δ) *tại A*

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I,\Delta)=R=IA \\ IA\perp(\Delta);\ A=(\Delta)\cap(C) \end{cases}$$



Khi đó: $\overrightarrow{IA}\perp\overrightarrow{u}$*: vectơ chỉ phương của* (Δ)

B.CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN:

I. Dạng I: *Viết phương trình đường tròn*

1. Loại I: Viết phương trình đường tròn qua 3 điểm không thẳng hàng M; N; P (đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP).

* Phương pháp:

Cách 1: * Tìm tâm I của đường tròn bằng cách giải hệ: $\begin{cases} IM=IN \\ IM=IP \end{cases}$

*Tìm bán kính R của đường tròn từ R= IM

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn dạng (1)

Cách 2: * Viết phương trình đường tròn dạng (2)

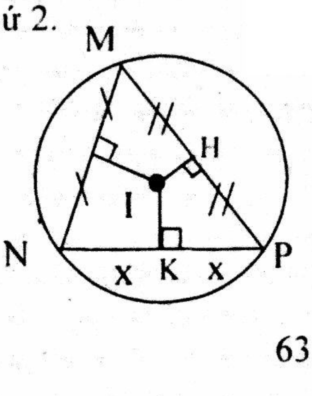
* Thay tọa độ M; N; P lần lượt vào (2) $\Rightarrow$ hệ 3 ẩn A; B; C $\Rightarrow$ A; B; C

Cách 3 * Viết phương trình đường trung trực (d_1) của một cạnh tam giác.

* Viết phương trình đường trung trực (d_2) của cạnh thứ 2.

Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ.

$$\begin{cases} \text{pt }(d_1) \\ \text{pt }(d_2) \end{cases} \Rightarrow I \Rightarrow \text{bán kính } R = IM$$



Cách 4: Gọi I là tâm của đường tròn cần tìm

H; K lần lượt là trung điểm cạnh MP; NP.

Tìm I từ hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{MP} \\ \overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{NP} \end{cases}$

*** Lưu ý**: *Nếu ΔMNP đặc biệt thì tìm tâm; bán kính bằng cách đặc biệt theo chú ý $\Rightarrow$ phương trình đường tròn dạng (1).*

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Viết phương trình đường tròn qua 3 điểm M(−1; 2); N(−1; 4); P(1; 2).

Giải:

Cách 1:

Phương trình đường tròn (C) qua M; N; P có dạng:

$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ (với $A^2 + B^2 - C > 0$)

Do (C) qua M(−1; 2); N(−1; 4); P(1; 2) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -2A + 4B + C + 5 = 0 \\ -2A + 8B + C + 17 = 0 \\ 2A + 4B + C + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -3 \\ C = 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - 6y + 7 = 0$

*** *Chú ý***: *ΔMNP vuông ở M nên có thể giải bài toán trên bằng cách 2 như sau:*

Cách 2: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (0;2) \\ \overrightarrow{MP} = (2;0) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MP} \Rightarrow \Delta MNP$ vuông ở M

$\Rightarrow$ Tâm I của đường tròn (C) ngoại tiếp ΔMNP là trung điểm cạnh huyền NP; Do đó I(0;3) là tâm và bán kính đường tròn (C) là: $R = \dfrac{NP}{2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + (y - 3)^2 = 2$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình đường tròn qua A_1 (1; − 2) và qua các giao điểm của đường thẳng $x - 7y + 10 = 0$ với đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Giải

Tọa độ giao điểm của đường thẳng và đường tròn đã cho là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 7y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y - 10 \\ (7y - 10)^2 + y^2 - 2(7y - 10) + 4y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y - 10 \\ 50y^2 - 150y + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y - 10 \\ y = 1;\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Do đó các giao điểm của đường thẳng và đường tròn trên là (– 3; 1) (4; 2).

Vậy đường tròn cần tìm đi qua A_1 (1; –2); (–3; 1); (4; 2) và có phương trình dạng:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0\ ;\ (A^2 + B^2 - C > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A - 4B + C + 5 = 0 & (1) \\ -6A + 2B + C + 10 = 0 & (2) \\ 8A + 4B + C + 20 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8A + 6B + 5 = 0 & (2) - (1) \\ 6A + 8B + 15 = 0 & (3) - (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{50}{-100} = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{150}{-100} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow 3 - 3 + C + 10 = 0 \Rightarrow C = -10$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$

2. *Loại 2: Viết phương trình đường tròn(C) có đường kính AB*

*Phương pháp: + Tìm tâm I của (C) là trung điểm đoạn AB.

+ (C) có bán kính $R = \dfrac{AB}{2}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C) (dạng (1)).

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho A(–1; 2); B(–1; 4); C(1; 2)

1. Viết phương trình đường tròn đường kính AB.
2. Viết phương trình đường tròn (C) tâm I(1; 2), có bán kính R biết 2R = AB

Giải

1. Tâm I của đường tròn (C') cần tìm là trung điểm đoạn AB $\Rightarrow$ I(–1; 3)

Khi đó (C') có bán kính $R' = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C') là: $(x+1)^2 + (y - 3)^2 = 1$

2. Đường tròn (C) có bán kính R thỏa 2R = AB; AB = 2

$\Rightarrow R = 1 \Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C) là: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy cho A; B là hai điểm thuộc trục Ox, có hoành độ là nghiệm phương trình : $x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$ (1)

1. Viết phương trình đường tròn đường kính AB.
2. Cho E(0; 1). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp Δ AEC?

Giải

1. A, B $\in$ Ox $\Rightarrow$ A(x_1; 0); B(x_2; 0)

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m = m^2 + m + 1 > 0; \quad \forall m \in R$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm x_1; x_2 phân biệt (lần lượt là hoành độ điểm A; B); $\forall m \in R$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$$

Khi đó đường tròn (C) đường kính AB có tâm là trung điểm $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; 0\right)$ của đoạn AB; bán kính $R = \frac{AB}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_1+x_2}{2} = m+1 \\ R^2 = \dfrac{1}{4}AB^2 = \dfrac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 = \dfrac{1}{4}\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(m+1; 0) \\ R^2 = \dfrac{1}{4}\left[4(m+1)^2 - 4m\right] = m^2 + m + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C) là:

$$(x - m - 1)^2 + y^2 = m^2 + m + 1, \quad \forall m \in \mathbf{R}$$

2. Phương trình đường tròn (C_1) đi qua A; B; E có dạng:

$$x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C = 0 \text{ (với } A_1^2 + B_1^2 - C > 0)$$

Ta có E(0; 1); A(x_1; 0); B(x_2; 0) thuộc (C_1) nên:

$$\begin{cases} 2B_1 + C + 1 = 0 & (1) \\ 2A_1x_1 + x_1^2 + C = 0 & (2) \\ 2A_1x_2 + x_2^2 + C = 0 & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) – (3) vế theo vế ta được: $2A_1(x_1 - x_2) + (x_1^2 - x_2^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left[2A_1 + (x_1 + x_2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 = -\frac{x_1+x_2}{2} = -(m+1) \qquad (\text{vì } x_1 \neq x_2)$$

Lấy (2) + (3) vế theo vế ta được: $2A_1(x_1 + x_2) + (x_1^2 + x_2^2) + 2C = 0$

$$2\left[-\frac{x_1+x_2}{2}\right](x_1+x_2) + (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2C = 0$$

$$\Leftrightarrow 2C = 2x_1x_2 \Leftrightarrow C = x_1x_2 \Leftrightarrow C = m$$

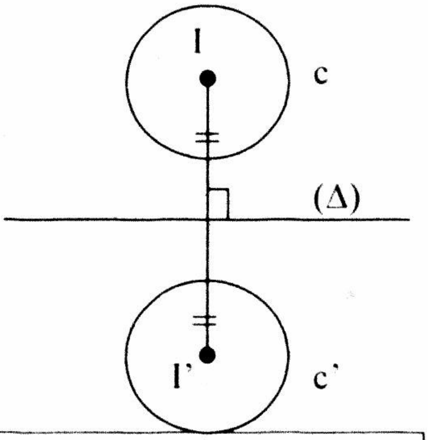
Từ (1) ta có: $B_1 = -\frac{1+C}{2} = -\frac{1+m}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = -(m+1) \\ B_1 = -\dfrac{(1+m)}{2} \\ C = m \end{cases} \qquad (\text{thỏa mãn } A_1^2 + B_1^2 - C > 0)$$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABE là:

$$x^2 - 2(m+1)x - (m+1)y + m = 0.$$

3. *Loại 3: Viết phương trình đường tròn(C') đối xứng đối với đường tròn(C) qua đường thẳng (Δ)*



*Phương pháp:

+ Tìm tâm I' của (C').

Ta có I' đối xứng với tâm I của (C) qua (Δ) $\Rightarrow$ I'

+ Đường tròn (C') có bán kính bằng bán kính của đường tròn (C)

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C') (dạng (1))

*Chú ý: Nếu $I \in (\Delta)$ thì $(C') \equiv (C)$

> ***Bài 5.*** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng (Δ): $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (Δ). Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C').

Giải

(C) có tâm I(1; 2), bán kính R = 2. Gọi $H(x_H; y_H)$ là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng (d): $x - y - 1 = 0$.

Ta có hệ $\begin{cases} x_H - y_H - 1 = 0 \\ \overrightarrow{IH} \perp \vec{u} = (1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - y_H - 1 = 0 \\ \overrightarrow{IH}.\vec{u} = 0 \end{cases}$

($\vec{u}$: là một vectơ chỉ phương của (Δ); $\overrightarrow{IH} = (x_H - 1; y_H - 2)$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H - y_H - 1 = 0 \\ x_H - 1 + y_H - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1)$$

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'

$\Rightarrow$ I' đối xứng I qua đường thẳng (Δ), R' = R = 2

Ta có: H là trung điểm đoạn II'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{I'} = 2x_H - x_I = 4 - 1 = 3 \\ y_{I'} = 2y_H - y_I = 2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(3; 0)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C') là: $(x-3)^2 + y^2 = 4$

* Tọa độ giao điểm của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (x-1)^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hai đường tròn (C) và (C') có các giao điểm là: (1; 0), (3;2)

4. *Loại 4: Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với đường thẳng*

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình đường tròn (C) qua B(3; 1) và tiếp xúc đường thẳng (Δ): $x + y - 3 = 0$ tại A(1; 2).

Chú ý:

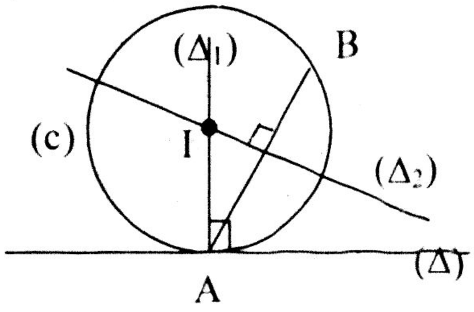
a) Đường tròn (C) có tâm I, bán kính R tiếp xúc $(\Delta) \Leftrightarrow d(I, \Delta)=R$

b) Đường tròn (C) tiếp xúc với (Δ) tại A và qua B.

⇒ Tâm I của (C) là giao điểm của (Δ_1); (Δ_2)

Trong đó (Δ_1) *qua A và* $(\Delta_1) \perp (\Delta)$

(Δ_2) *là đường trung trực đoạn AB.*



Giải

Cách 1: Gọi I(a;b) là tâm đường tròn(C)

Theo đề ta có: $\begin{cases} IA = IB \\ I \in (\Delta_1) \end{cases}$ (với (Δ_1) qua A(1; 2) và $(\Delta_1) \perp (\Delta)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ I \in (\Delta_1) \end{cases}$$

(*phương trình đường thẳng*(Δ_1)là: $(x-1)-(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y+1=0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2+(2-b)^2=(3-a)^2+(1-b)^2 \\ a-b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b-5=0 \\ a-b+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$$

Khi đó đường tròn (C) có bán kính $R = IA = d(I,\Delta) = \dfrac{\left|\frac{7}{2}+\frac{9}{2}-3\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

⇒ Phương trình đường tròn (C) là: $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$

Cách 2: Đường thẳng (Δ_1) qua A và $\perp (\Delta) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng (Δ_1): $x-y+1=0$

Đường thẳng (Δ_2) là đường trung trực cạnh AB $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng (Δ_2) là: $4x-2y-5=0$

Đường tròn (C) tiếp xúc (Δ) tại A và (C) qua B $\Rightarrow$ Tâm I của đường tròn là giao điểm của đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2).

Do đó tọa độ tâm I là nghiệm của hệ : $\begin{cases}4x-2y-5=o\\ x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\ y=\dfrac{9}{2}\end{cases} \Leftrightarrow I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right)$

Bán kính của đường tròn (C) là: $R=d(I,\Delta)=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C) là: $\left(-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho A(2; 0); B(6; 4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc trục hoành tại A và khoảng cách từ tâm của (C) đến B bằng 5

Giải

Gọi I là tâm đường tròn (C).

Đường tròn (C) tiếp xúc trục hoành tại A $\Rightarrow$ I(2; b)

Ta có $IB=5 \Leftrightarrow IB^2=25 \Leftrightarrow (6-2)^2+(4-b)^2=25$

$$\Leftrightarrow (4-b)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4-b=3\\ 4-b=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=1\\ b=7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}I(2;1)\\ I(2;7)\end{array}\right.$$

*Bán kính đường tròn (C) là $R=d(I,Ox)=|b|$

+ Với $I(2;1) \Rightarrow R=|b|=|1|=1$ $\Rightarrow$ Phương trình đường tròn $(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

+Với $I(2;7) \Rightarrow R=|b|=|7|=7$ $\Rightarrow$ Phương trình đường tròn $(x-2)^2+(y-7)^2=49$.

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ có tâm thuộc đường thẳng: $2x-y-3=0$

Giải

Gọi I(a;b) là tâm đường tròn (C)

$$\Rightarrow \begin{cases}2a-b-3=0\\ d(I,Ox)=d(I,Oy)=R \ \text{(bán kính(C))}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a-b-3=0\\ |b|=|a|=R\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a-b-3=0\\ a=b\end{cases}\\ \begin{cases}2a-b-3=0\\ a=-b\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}a=3\\ b=3\\ R=3\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a=1\\ b=-1\\ R=1\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(C):(x-3)^2+(y-3)^2=9\\ (C):(x-1)^2+(y+1)^2=1\end{array}\right.$$

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ và qua A(1; −2).

*** Chú ý:** *Đường tròn (C) tâm I(a; b) tiếp xúc với hai trục tọa độ và qua điểm A không thuộc hai trục tọa độ. Suy ra a; x_A cùng dấu và b; y_A cùng dấu.*

Giải

Đường tròn (C) qua A(1; −2) và tiếp xúc với hai trục toạ độ.

Gọi I(a; b) là tâm đường tròn (C) $\Rightarrow \begin{cases} a > 0;\quad b < 0;\quad IA = d(I,\ Ox) \\ d(I,Ox) = d(I,Oy) = R \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0;\ b < 0;\ IA^2 = a^2 \\ IA^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b = R \\ (1-a)^2 + (-2-b)^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -b = R \\ (1-a)^2 + (-2+a)^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -b = R \\ a^2 - 6a + 5 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

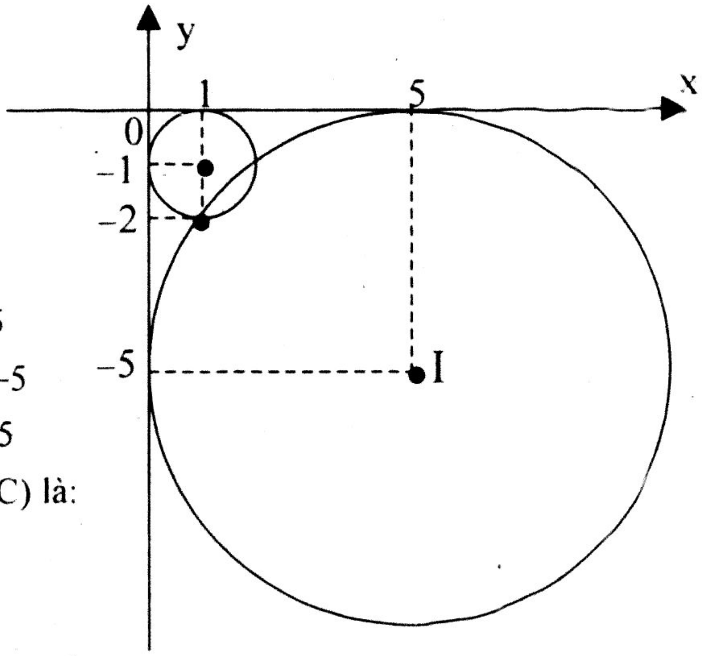
Ta có (1) : $\Rightarrow$ a = 1 hoặc a =5

Do đó ta có: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ R = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 5 \\ b = -5 \\ R = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C) là:

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$

hoặc $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$



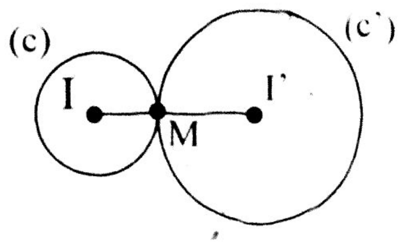
5. *Loại 5*: *Lập phương trình đường tròn (C') có bán kính R' và tiếp xúc với đường tròn C(I;R) tại M.*

- **Phương pháp**: Gọi I'(a;b) là tâm đường tròn (C')

  + **Trường hợp 1**: (C) và (C') tiếp xúc ngoài tại M

  Ta có $\overrightarrow{MI'} = -\dfrac{R'}{R}.\overrightarrow{MI}$

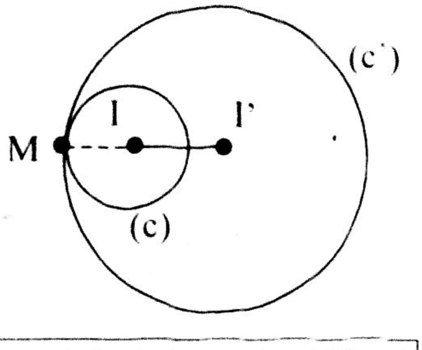
  $\Rightarrow$ I' $\Rightarrow$ phương trình (C') theo dạng (1).



  + **Trường hợp 2**: (C) và (C') tiếp xúc trong tại M

  Ta có: $\overrightarrow{MI'} = \dfrac{R'}{R}.\overrightarrow{MI}$

  $\Rightarrow$ I' $\Rightarrow$ phương trình (C') theo dạng (1)



Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình đường tròn (C') có bán kính R'=10 và tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ tại M(4; 2).

Giải

(C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \Rightarrow I(1; -2)$; $R = 5$ lần lượt là tâm và bán kính của (C).

Gọi $I'(a;b)$ là tâm đường tròn (C').

+ **Trường hợp 1**: (C) và (C') tiếp xúc ngoài tại M

Ta có : $\overrightarrow{MI'} = -\frac{R'}{R}.\overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MI'} = -2\overrightarrow{MI}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_{I'} + 2x_I}{1+2} \\ y_M = \dfrac{y_{I'} + 2y_I}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \dfrac{a+2}{3} \\ 2 = \dfrac{b-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow I' = (10;10)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C') là: $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$

+ **Trường hợp 2**: (C) và (C') tiếp xúc trong tại M

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MI'} = \frac{R'}{R}.\overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MI'} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_{I'} - 2x_I}{1-2} \\ y_M = \dfrac{y_{I'} - 2y_I}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \dfrac{a-2}{-1} \\ 2 = \dfrac{b+4}{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow I'(-2; -6)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C') là: $(x+2)^2 + (y+6)^2 = 100$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình đường tròn

1. Có tâm $I(1; -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng (d): $x + y - 2 = 0$
2. Tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm thuộc đường thẳng (Δ): $2x - y - 3 = 0$
3. Có bán kính $2\sqrt{5}$ và tiếp xúc với đường thẳng (d) $x - 2y + 3 = 0$ tại điểm A có tung độ bằng 1.
4. Qua $A(3; 1)$; $B(2; 2)$ và tiếp xúc đường thẳng (Δ): $x - 2y + 4 = 0$

Giải

1. Bán kính đường tròn (C) tâm $I(1; -2)$ là:

$$R = d(I,d) = \frac{|1-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn(C) là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{2}$

2. Gọi $I(a; b)$ là tâm đường tròn (C)

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} 2a - b - 3 = 0 \\ d(I,Ox) = d(I,Oy) = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 3 & (1) \\ |b| = |a| = R & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$$

* Với a = b từ (1) $\Rightarrow a = 2a - 3 \Rightarrow a = 3$

Vậy $\begin{cases} a = b = 3 \\ R = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C) là: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

*Với $a = -b$ từ (1) $\Rightarrow b = 2(-b) - 3 \Rightarrow b = -1$

Vậy $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ R = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C) là: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$

3. Gọi I(a; b) là tâm đường tròn (C) thỏa bài toán

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I,(d)) = 2\sqrt{5} \\ A(x_A;1) \in (d): x - 2y + 3 = 0 \\ \overrightarrow{IA} \perp \vec{u} \qquad \text{với } \vec{u} = (2;1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|a - 2b + 3|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \\ x_A - 2 + 3 = 0 \qquad \Rightarrow x_A = -1 \\ \overrightarrow{IA}.\vec{u} = 0 \qquad \text{với} \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (-1-a;\ 1-b) \\ \vec{u} = (2;\ 1) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a - 2b + 3| = 10 \\ 2(-1-a) + (1-b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a - 2b + 3| = 10 & (1) \\ b = -2a - 1 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$|a - 2(-2a-1) + 3| = 10 \Rightarrow |5a + 5| = 10$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a = 1; & (b = -3) \\ a = -3; & (b = 5) \end{array}\right.$$

* Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ ta có phương trình đường tròn là: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$

* Với $\begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$ ta có phương trình đường tròn là: $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 20$

4. Gọi I(a; b) là tâm đường tròn (C). Ta có:

$$\begin{cases} IA = IB \\ d(I, \Delta) = IA = R \quad \text{với } (\Delta): x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(3-a)^2+(1-b)^2} = \sqrt{(2-a)^2+(2-b)^2} \\ \dfrac{|a-2b+4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(2-a)^2+(2-b)^2} = R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-a)^2+(1-b)^2 = (2-a)^2+(2-b)^2 \\ (a-2b+4)^2 = 5[(2-a)^2+(2-b)^2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a-1 & (1) \\ (6-a)^2 = 5[(2-a)^2+(3-a)^2] & (2) \end{cases}.$$

Từ (2) ta có: $36 - 12a + a^2 = 5[4 - 4a + a^2 + 9 - 6a + a^2]$

$$\Rightarrow 9a^2 - 38a + 29 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1;\quad (b=0) \\ a = \dfrac{29}{9};\ \left(b = \dfrac{20}{9}\right) \end{array}\right.$$

$$\text{*Với } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{|1+4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn(C) là: $(x-1)^2 + y^2 = 5$

$$\text{*Với } \begin{cases} a = \dfrac{29}{9} \\ b = \dfrac{20}{9} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{\left|\dfrac{29}{9} - \dfrac{40}{9} + \dfrac{36}{9}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{25}{9\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{9}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn(C) là: $(x - \dfrac{29}{9})^2 + (y - \dfrac{20}{9})^2 = (\dfrac{5\sqrt{5}}{9})^2$

Chú ý:

Đường tròn (O') qua 9 điểm: ba trung điểm 3 cạnh, ba chân đường cao, ba trung điểm của 3 đoạn nối trực tâm với ba đỉnh của tam giác, có tâm là trung điểm đoạn nối O; H (O; H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác), bán kính đường tròn (O') là $R' = \dfrac{1}{2}R$ (với R: bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ ABC)

(Đường tròn qua 9 điểm trên được gọi là đường tròn Ơle).

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình đường tròn qua ba trung điểm của ba cạnh Δ ABC, biết đường tròn ngoại tiếp Δ ABC có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ và trực tâm là H(11; 12).

Giải

Gọi I', R' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn cần tìm:

Đường tròn ngoại tiếp Δ ABC có tâm I(1; 2), bán kính R = 10

$\Rightarrow$ I' là trung điểm đoạn IH, $R' = \dfrac{1}{2}R$ $\Rightarrow$ I'(6; 7), R' = 5

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$

II. Dạng II: ***Tìm tâm và bán kính của đường tròn khi biết phương trình:***

Chú ý: a. Nếu phương trình

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{tâm: } I(a;b) \\ \text{bán kính} : R \end{cases}$$

b. Nếu phương trình $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$, $(A^2+B^2-C>0)$ thì đường tròn tâm $I(-A;-B)$ và bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2-C}$

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy xác định tâm và bán kính của đường tròn (C). Biết phương trình của (C):

1. $(2x+3)^2+(11-2y)^2=1$ (1)
2. $3x^2+3y^2-6x+18y-1=0$ (2)

Giải

1. $(1) \Leftrightarrow 4(x+\frac{3}{2})^2+4(y-\frac{11}{2})^2=1$

$\Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{11}{2})^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Đường tròn (C) có tâm $I\left(-\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$; Bán kính $R=\frac{1}{2}$

2. $(2) \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y-\frac{1}{3}=0$

Ta có $A=-1$; $B=3$; $C=-\frac{1}{3}$

Do đó (2) có tâm $I(1;-3)$, bán kính $R=\sqrt{1+9+\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{93}}{3}$

- ***Chú ý****: phương trình (2) chưa phải là phương trình dạng:* $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$, $(A^2+B^2-C>0)$ *nên để (2) có dạng này ta chia cho 3, rồi suy ra A, B, C.*

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho (C_m): $x^2+y^2-2(m-2)x+2y-(1+m^2)=0$. Xác định tâm và bán kính của (C_m)

Giải

Ta có: $A=-(m-2)$, $B=1$, $C=-(1+m^2)$

Ta có: $A^2+B^2-C=(m-2)^2+1+(1+m^2)>0$, $\forall m\in R$

$\Rightarrow (C_m)$ là đường tròn có tâm $I(m-2;-1)$ và bán kính

$R=\sqrt{A^2+B^2-C}=\sqrt{(m-2)^2+1+(1+m^2)}=\sqrt{m^2-4m+6}$

III. Dạng III: *Tìm quỹ tích tâm I của họ đường tròn* (C_m)

*Phương pháp:

+ Tìm m để (C_m) là đường tròn; gọi là điều kiện (1)

+ Tìm tọa độ tâm I của (C_m) theo m: giả sử I $\begin{cases} x_I & \text{(theo m)} \\ y_I & \text{(theo m)} \end{cases}$

+ Khử m trong hệ trên => phương trình $F(x_I; y_I) = 0$ (phương trình quỹ tích)

+ Từ điều kiện (1) => giới hạn quỹ tích

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa Oxy cho

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2(m - 1)x + 2(m + 5)y + m + 21 = 0.$$

Xác định tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C_m)?

Giải

Ta có $A = -(m - 1)$; $B = (m + 5)$; $C = m + 21$

*(C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow A^2 + B^2 - C > 0$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 + (m + 5)^2 - (m + 21) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 7m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{2} \text{ hoặc } m > -1$$

* Với $m < -\frac{5}{2}$ hoặc $m > -1$; (C_m) là đường tròn có tâm $I(x_I; y_I)$

Với $\begin{cases} x_I = m - 1 & (1) \\ y_I = -(m + 5) & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow x_I + y_I + 6 = 0 \Rightarrow$ I thuộc đường thẳng $x + y + 6 = 0$

Mặt khác, do $m < -\frac{5}{2}$ hoặc $m > -1$

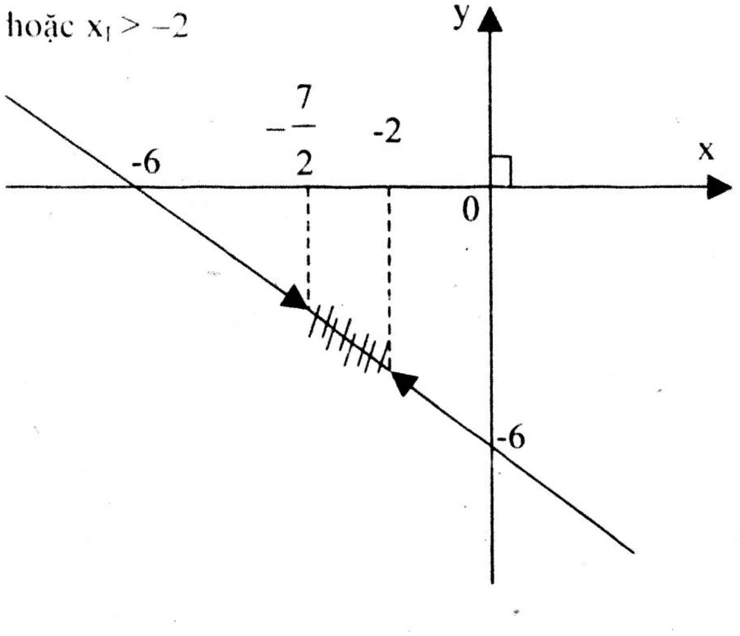
Từ (1) $\Rightarrow m = x_I + 1$

Khi đó ta có: $x_I + 1 < -\frac{5}{2}$ hoặc $x_I + 1 > -1$

$$\Rightarrow x_I < -\frac{7}{2} \text{ hoặc } x_I > -2$$

Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn (Cm) là đường thẳng $x + y + 6 = 0$,

với $x < -\frac{7}{2}$ hoặc $x > -2$.



IV. Dạng IV: *Tiếp tuyến của đường tròn*

***Chú ý:** Đường tròn $C(I;R)$ tiếp xúc đường thẳng (Δ) $\Leftrightarrow$ $d(I;\ \Delta) \to R$*

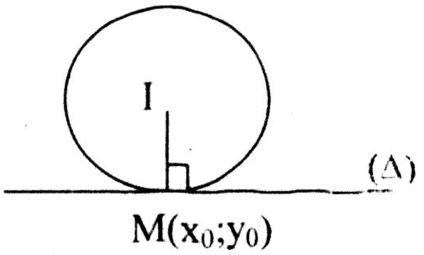
1. *Loại 1*: Tiếp tuyến của đường tròn C(I; R) tại $M(x_0;\ y_0) \in (C)$

Phương pháp: Tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) tại $M(x_0; y_0)$

$\Leftrightarrow$ Tiếp tuyến (Δ) qua $M(x_0;\ y_0)$ và nhận $\overrightarrow{IM}\ (A;B)$ làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$



Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình tiếp tuyến của (C): $x^2 + y^2 = 25$ tại điểm $M(-3;\ 4) \in (C)$.

Giải

(C): $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow$ (C) có tâm $O(0;\ 0)$

Tiếp tuyến của (C) tại $M(-3;\ 4) \in (C)$ qua $M(-3;\ 4)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{OM} = (-3;\ 4)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$-3(x + 3) + 4(y - 4) = 0 \Leftrightarrow -3x + 4y - 25 = 0.$$

Bài 17. Cho đường tròn (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Chứng minh rằng: tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;\ y_0) \in (C)$ có phương trình:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2.$$

Giải

+ $M(x_0;\ y_0) \in (C) \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$

+ (C) có tâm $I(a;\ b)$

+ $M_1(x;\ y)$ thuộc tiếp tuyến (Δ) của (C) tại $M(x_0;\ y_0)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{MM_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{MM_1} = 0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b) \\ \overrightarrow{MM_1} = (x - x_0; y - y_0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)[(x - a) - (x_0 - a)] + (y_0 - b)[(y - b) - (y_0 - b)] = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$ (điều phải chứng minh)

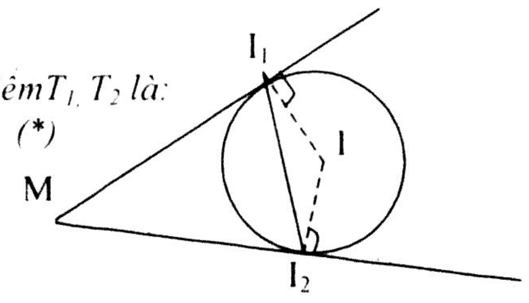
***Chú ý**: Khi $M(x_M;\ y_M)$ ở bên ngoài đường tròn(C), khi đó có hai tiếp tuyến của (C) qua M là: MT_1; MT_2(T_1; T_2 là các tiếp điểm)*

Ta có: + Phương trình tiếp tuyến MT_1 của (C) là phương trình tiếp tuyến của (C) tại T_1, do đó phương trình tiếp tuyến MT_1 là:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$$

+ Phương trình tiếp tuyến MT_2 của (C) là phương trình tiếp tuyến của (C) tại T_2, do đó phương trình tiếp tuyến MT_2 là:

$$(x_2 - a)(x - a) + (y_2 - b)(y - b) = R^2$$



Hai tiếp tuyến trên cùng qua điểm M nên ta có:

$$(x_1 - a)(x_M - a) + (y_1 - b)(y_M - b) = R^2$$

và $(x_2 - a)(x_M - a) + (y_2 - b)(y_M - b) = R^2$

=> *phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm* T_1, T_2 *là:*

$$(x_M - a)(x - a) + (y_M - b)(y - b) = R^2 \quad (*)$$

Khi biết tọa độ điểm M và phương trình đường tròn (C) ta có thể dùng phương trình (*) để dự đoán phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm và tính nhanh được tọa độ các tiếp điểm.

Lưu ý: *Chỉ dùng kết quả bài 17 để kiểm tra tọa độ tiếp điểm.*

2. *Loại 2:* Tiếp tuyến của đường tròn (C) qua $M_1(x_1; y_1)$ (đường tròn (C) có tâm I; bán kính R)

******Chú ý*: Có thể giải bài toán bằng một trong các cách sau:**

Cách 1: + Xét đường thẳng $x = x_1$ (đường thẳng này qua M_1 và //Oy) có phải là tiếp tuyến của đường tròn (C) không.

+ Xét đường thẳng (Δ) qua $M_1(x_1; y_1)$ và có hệ số góc k ((Δ) không song song Oy)

⇒ Phương trình đường thẳng (Δ) là: $y = k(x - x_1) + y_1$

+ Tìm k từ phương trình d(I, Δ) = R

Cách 2: + Đường thẳng (Δ) qua $M_1(x_1; y_1)$ ⇒ phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

+ (Δ) là tiếp tuyến của (C) ⇔ d(I; Δ) = R

⇒ Phương trình 2 ẩn A; B

⇒ A theo B (hoặc B theo A) ⇒ phương trình tiếp tuyến.

Cách 3: Xét đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ là tiếp tuyến của (C) qua $M(x_1; y_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ d(I, \Delta) = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \text{ theo } A \\ B \text{ theo } A \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình tiếp tuyến.}$$

Bài 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình tiếp tuyến của (C): $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4$ kẻ từ $M_1(1; 1)$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(3; 6); bán kính R = 2

Cách 1: Đường thẳng (Δ ') qua $M_1(1;1)$ và (Δ ') // Oy

⇒ Phương trình đường thẳng (Δ ') là: $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

$$\Rightarrow d(I, \Delta') = \frac{|3 - 1|}{1} = 2 \quad ; \quad \Rightarrow d(I, \Delta') = R$$

⇒ (Δ '): x = 1 là 1 tiếp tuyến của (C)

+ Đường thẳng (Δ) qua $M_1(1; 1)$ và có hệ số góc góc k ((Δ) không song song Oy)

⇒ Phương trình đường thẳng (Δ ') là: $y = k(x - 1) + 1 \Leftrightarrow kx - y + 1 - k = 0$

(Δ') là tiếp tuyến của (C) ⇔ d(I, Δ ') = R

$$\Leftrightarrow \frac{|3k-6+1-k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \Leftrightarrow |2k-5| = 2\sqrt{k^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (2k-5)^2 = 4(k^2+1) \Leftrightarrow 20k-21=0 \Leftrightarrow k=\frac{21}{20}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ') là: $y=\frac{21}{20}(x-1)+1 \Leftrightarrow 21x-20y-1=0$

Vậy qua $M_1(1;1)$ có 2 tiếp tuyến với (C) phương trình là:
$x=1$; $21x-20y-1=0$

Cách 2: Đường thẳng (Δ) qua $M_1(1;1)$, có phương trình dạng:

$$A(x-1)+B(y-1)=0 \qquad (A^2+B^2\neq 0)$$

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2A+5B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \Leftrightarrow |2A+5B| = 2\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Leftrightarrow (2A+5B)^2 = 4(A^2+B^2)$$

$$\Leftrightarrow 21B^2+20AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ B=-\frac{20}{21}A \end{array}\right.$$

*Với $B=0$; $\Rightarrow (A\neq 0)$ (vì $A^2+B^2\neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) của (C) là:

$A(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$

*Với $B=-\frac{20}{21}A \Rightarrow (A\neq 0)$ (vì $A^2+B^2\neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) của (C) là:

$$\Rightarrow A(x-1)+(-\frac{20}{21}A)(y-1)=0 \Leftrightarrow 21x-20y-1=.0$$

Kết luận: Vậy qua M_1 có hai tiếp tuyến với (C) là: $x-1=0$; $21x-20y-1=0$

Cách 3: Đường thẳng (Δ): $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$ là tiếp tuyến của (C) qua qua $M_1(1;1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ d(I,\Delta)=R \end{cases} \text{(với I(3; 6), R = 2 lần lượt là tâm và bán kính của (C))}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-(A+B) \\ \dfrac{|3A+6B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-(A+B) & (1) \\ |3A+6B-(A+B)| = 2\sqrt{A^2+B^2} & (2) \end{cases}$$

Ta có (2): $\Rightarrow |2A+5B| = 2\sqrt{A^2+B^2} \quad \Rightarrow (2A+5B)^2 = 4(A^2+B^2)$

$$\Rightarrow 21B^2 + 20AB = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = -\dfrac{20}{21}A \end{array}\right.$$

* Với $B = 0 \Rightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ C = -A \end{cases}$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) là:

$Ax - A = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

* Với $B = -\dfrac{20}{21}A \Rightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ C = -\dfrac{A}{21} \end{cases}$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) là:

$$Ax - \frac{20}{21}y - \frac{A}{21} = 0 \Rightarrow 21x - 20y - 1 = 0 \text{ (vì } A \neq 0)$$

Vậy qua M_1 có hai tiếp tuyến với (C) là: $x - 1 = 0$; $21x - 20y - 1 = 0$

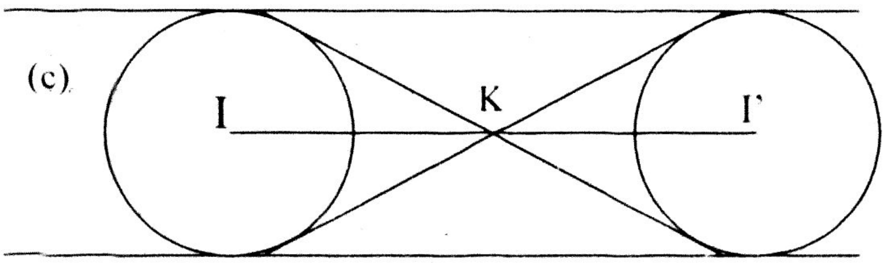
3. *Loại 3*: Tiếp tuyến chung của 2 đường tròn C(I; R) và C'(I'; R')

Trường hợp 1: (C) và (C') ngoài nhau ⇔ II' > R + R'.

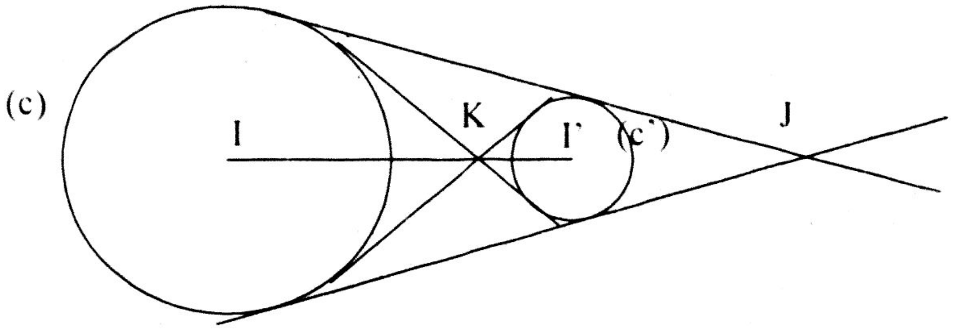
Khi đó (C) và (C') có 4 tiếp tuyến chung.

Cách 1

* Nếu (C) và (C') ngoài nhau và có R = R'. Khi đó (C) và (C') có 4 tiếp tuyến chung, trong đó có 2 tiếp tuyến chung ngoài song song II' và 2 tiếp tuyến chung trong cắt nhau tại K là trung điểm đoạn II'. Tiếp tuyến chung trong của (C) và (C') là tiếp tuyến của (C) (hoặc (C')) qua K.



* Nếu (C) và (C') ngoài nhau và có R ≠ R'. Khi đó (C) và (C') có 4 tiếp tuyến chung, trong đó có 2 tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại J và 2 tiếp tuyến chung trong cắt nhau tại K. Tiếp tuyến chung trong của (C) và (C') là tiếp tuyến của (C) hoặc (C') qua K, tiếp tuyến chung ngoài của (C) và (C') là tiếp tuyến của (C) hoặc (C') qua J (trở về loại 2)



Cách tìm J và K:

Ta có: $\frac{KI}{KI'} = \frac{R}{R'} = \frac{J}{J'} \Rightarrow \overrightarrow{KI} = -\frac{R}{R'}.\overrightarrow{KI'}$; $\overrightarrow{JI} = \frac{R}{R'}\overrightarrow{JI'} \Rightarrow$ J và K

Cách 2:

Xét đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C) và (C') $\Rightarrow \begin{cases} d(I, \Delta) = R \\ d(I', \Delta) = R' \end{cases}$; ta được hệ phương trình ba ẩn A; B; C

Từ hệ này ta tìm B theo A; C theo A hoặc A theo B và C theo B $\Rightarrow$ Tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C) và (C').

Bài 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và (C'): $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 4$

Giải

Ta có I(1; 2), R = 2 lần lượt là tâm và bán kính của (C)

I'(– 3; 6), R' = 2 = R lần lượt là tâm và bán kính của (C')

Ta có: $\overrightarrow{II'} = (-4;4) \Rightarrow II' = 4\sqrt{2} > R + R' = 4$

$\Rightarrow$ (C) và (C') ngoài nhau nên có 4 tiếp tuyến chung. Trong đó 2 tiếp tuyến chung ngoài song song với II' và 2 tiếp tuyến chung trong cắt nhau tại K(–1; 4) là trung điểm đoạn II'

* Tiếp tuyến chung ngoài (Δ) của (C) và (C') song song đường thẳng II' nên nhận vectơ $\vec{n}(1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến $\left(\vec{n} \perp \overrightarrow{II'}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung ngoài (Δ) là $x + y + c = 0$

Ta có $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3 + c|}{\sqrt{2}} = 2$

$\Rightarrow c = -3 \pm 2\sqrt{2}$

Vậy phương trình của 2 tiếp tuyến chung ngoài là: $x + y - 3 \pm 2\sqrt{2} = 0$

**** Viết phương trình tiếp tuyến chung trong của (C) và (C'):***

Cách 1: Xét đường thẳng (Δ_1) qua K(–1; 4)

+ Trường hợp 1: (Δ_1) // Oy

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ_1) là: $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$

Ta có: $d(I, \Delta_1) = |1 + 1| = 2 = R = d(I', \Delta_1)$

$\Rightarrow$ (Δ_1): x = – 1 là tiếp tuyến chung của (C) và (C')

+ Trường hợp 2: (Δ_1) không song song Oy

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng (Δ_1)

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ_1) là: $y = k(x + 1) + 4$

$\Rightarrow kx - y + (4 + k) = 0$

(Δ_1) là tiếp tuyến chung trong của (C) và (C')

$\Rightarrow d(I, \Delta_1) = R$

$$\Rightarrow \frac{|k-2+k+4|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \quad \Rightarrow |k+1| = \sqrt{k^2+1}$$

$\Rightarrow 2k = 0 \qquad \Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow$ $y = 4$ là một tiếp tuyến chung của (C) và (C')

*** *Cách 2*:** Tiếp tuyến chung trong (Δ_1) qua K(−1; 4) nên có phương trình :

$A(x + 1) + B(y - 4) = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

Ta có: $d(I, \Delta_1) = R \Leftrightarrow \dfrac{|2A+(-2B)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2$

$$\Leftrightarrow (A-B)^2 = \sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow A^2 + B^2 - 2AB = A^2 + B^2$$

$$\Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

*Với: $A = 0 \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ_1) cần tìm là: $B(y - 4) = 0 \Leftrightarrow y = 4$

*Với: $B = 0 \Rightarrow A \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ_1) cần tìm là: $A(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

Vậy phương trình tiếp tuyến chung của (C) và (C') là:

$y = 4;\ x + 1 = 0$

*** *Cách 3*:** Phương trình tiếp tuyến chung trong (Δ_1) của (C) và (C') là:

$Ax + By + C = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I, \Delta_1) = R \\ d(I', \Delta) = R' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|A+2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \qquad (1) \\ \dfrac{|-3A+6B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A+2B+C| = 2\sqrt{A^2+B^2} \\ |-3A+6B+C| = 2\sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \Rightarrow |A+2B+C| = |-3A+6B+C|$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A + 2B + C = -3A + 6B + C \\ A + 2B + C = 3A - 6B - C \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ C = A - 4B \end{cases}$$

+ Với $A = B$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$) $\Rightarrow A \neq 0$)

từ (1) $\Rightarrow |3A + C| = 2\sqrt{2A^2} \quad \Rightarrow |3A + C| = 2\sqrt{2}\ |A|$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3A + C = 2\sqrt{2}A \\ 3A + C = -2\sqrt{2}A \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = (-3 + 2\sqrt{2})A \\ C = (-3 - 2\sqrt{2})A \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ có 2 tiếp tuyến chung của (C) và (C') là:

$$Ax + Ay + (-3 \pm 2\sqrt{2})A = 0 \Rightarrow x + y - 3 \pm 2\sqrt{2} = 0$$

+ Với $C = A - 4B$

$$\text{từ (1)} \Rightarrow \frac{|A+2B+A-4B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2$$

$$\Rightarrow |A-B| = \sqrt{A^2+B^2} \quad \Rightarrow A.B = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

. $A = 0 \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$) và $C = -4B$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung trong của (C) và (C') là:

$By - 4B = 0 \Rightarrow y - 4 = 0$

. $B = 0 \Rightarrow A \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$) và $C = A$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung trong của (C) và (C') là:

$Ax + A = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$

Kết luận: Vậy có 4 tiếp tuyến chung của (C) và (C') với phương trình là:

$x + y - 3 \pm 2\sqrt{2} = 0$; $y - 4 = 0$; $x + 1 = 0$

Bài 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho (C): $x^2 + y^2 = 49$ và

(C'): $(x - 10)^2 + y^2 = 1$

a. Lập phương trình tiếp tuyến chung của (C) và (C')

b. Chứng minh rằng trong 8 tiếp điểm của câu a có hai bộ thẳng hàng.

Giải

a. * ***Cách 1***: Ta có $I \equiv O(0; 0)$, $R = 7$ lần lượt là tâm và bán kính của (C)

$I'(10; 0)$, $R' = 1$ lần lượt là tâm và bán kính của (C')

Ta có: $II' = 10$. Vậy $II' > R + R'$

Vậy (C) và (C') có 4 tiếp tuyến chung. Hai tiếp tuyến chung trong cắt nhau tại K, hai tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại J

$$\Rightarrow \frac{JO}{JI'} = \frac{R}{R'} = \frac{KO}{KI'}$$

$$\Rightarrow \frac{JO}{JI'} = 7 = \frac{KO}{KI'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{JO} = 7\overrightarrow{JI'} \\ \overrightarrow{KO} = -7\overrightarrow{KI'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_J = \dfrac{x_0 - 7x_{I'}}{1-7} = \dfrac{-70}{-6} = \dfrac{35}{3} \\ y_J = \dfrac{y_0 - 7y_{I'}}{1-7} = 0 \\ x_K = \dfrac{x_0 + 7x_{I'}}{1+7} = \dfrac{70}{8} = \dfrac{35}{4} \\ y_K = \dfrac{y_0 + 7y_{I'}}{1+7} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow J(\frac{35}{3}; 0)$, $K(\frac{35}{4}; 0)$

* Tiếp tuyến chung ngoài (Δ) của (C) và (C') qua $J(\frac{35}{3}; 0)$ có phương trình là:

$$A(x - \frac{35}{3}) + By = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

Ta có $d(I', \Delta) = R' \Leftrightarrow \dfrac{\left|-\frac{5}{3}A\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{3}|A| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}A^2 = A^2 + B^2 \Leftrightarrow \frac{16}{9}A^2 = B^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = \frac{4}{3}A \\ B = -\frac{4}{3}A \end{array}\right.$$

+ Với $B = \frac{4}{3}A \Rightarrow A \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung ngoài của (C) và (C') là

$A(x - \frac{35}{3}) + \frac{4}{3}Ay = 0$

$\Rightarrow 3x + 4y - 35 = 0$

+ Với $B = -\frac{4}{3}A \Rightarrow A \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung ngoài của (C) và (C') là:

$A(x - \frac{35}{3}) - \frac{4}{3}Ay = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y - 35 = 0$

* Tiếp tuyến chung trong (Δ_1) của (C) và (C') qua $K(\frac{35}{4}; 0)$ có phương trình là:

$$A'(x - \frac{35}{4}) + B'y = 0 \qquad (A'^2 + B'^2 \neq 0)$$

Ta có $d(I', \Delta_1) = R' \Leftrightarrow \dfrac{\left|\frac{5}{4}A'\right|}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}|A'| = \sqrt{A'^2 + B'^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}A'^2 = A'^2 + B'^2$$

$$\Leftrightarrow B'^2 = \frac{9}{16}A'^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B' = \frac{3}{4}A' \\ B' = -\frac{3}{4}A' \end{array}\right.$$

+ Với $B' = \frac{3}{4}A' \Rightarrow A' \neq 0$ (vì $A'^2 + B'^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung trong của (C) và (C') là

$$A'(x - \frac{35}{4}) + \frac{3}{4}A'y = 0$$

$\Rightarrow 4x + 3y - 35 = 0$

+ Với $B' = -\frac{3}{4}A' \Rightarrow A' \neq 0$ (vì $A'^2 + B'^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung trong của (C) và (C') là

$$A'(x - \frac{35}{4}) - \frac{3}{4}A'y = 0$$

$\Rightarrow 4x - 3y - 35 = 0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của (C) và (C') với phương trình là:

$3x + 4y - 35 = 0\ (d_1)$; $3x - 4y - 35 = 0\ (d_2)$

$4x + 3y - 35 = 0\ (d_3)$; $4x - 3y - 35 = 0\ (d_4)$

* ***Cách 2***: Phương trình tiếp tuyến chung (Δ) của (C) và (C') là:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I, \Delta) = R \\ d(I', \Delta) = R' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 7 \\ \dfrac{|10A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |C| = 7\sqrt{A^2 + B^2} & (1) \\ |10A + C| = \sqrt{A^2 + B^2} & (2) \end{cases} \Rightarrow |C| = 7|10A + C|$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = -\frac{35}{3}A \\ C = -\frac{35}{4}A \end{array}\right.$$

+ Với $C = -\frac{35}{3}A$

từ (2) $\Rightarrow \left|10A - \frac{35}{3}A\right| = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \Rightarrow |5A| = 3\sqrt{A^2 + B^2}$

$$\Rightarrow 25A^2 = 9\ (A^2 + B^2)$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{16}{9}A^2 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B = \dfrac{4A}{3} \\ B = -\dfrac{4A}{4} \end{array}\right. \qquad (A \neq 0 \text{ vì } A^2 + B^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{4A}{3}; & (A \neq 0) \\ C = -\dfrac{35}{3}A \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} B = -\dfrac{4A}{3}; & (A \neq 0) \\ C = -\dfrac{35}{3}A \end{cases}$$

Các đường thẳng sau là các tiếp tuyến chung của (C) và (C') là:

$$Ax + \frac{4}{3}Ay - \frac{35}{3}A = 0 \ ; \quad Ax - \frac{4}{3}Ay - \frac{35}{3}A = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 35 = 0 \ ; \quad 3x + 4y - 35 = 0$$

+ Với $C = -\frac{35}{4}A$

Từ (2) $\Rightarrow \left|10A - \frac{35}{4}A\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\Rightarrow |5A| = 4\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow 25A^2 = 16(A^2 + B^2)$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{9}{16}A^2 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B = \dfrac{3A}{4} \\ B = -\dfrac{3A}{4} \end{array}\right. \qquad (A \neq 0 \text{ vì } A^2 + B^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{3A}{4}; & (A \neq 0) \\ C = -\dfrac{35}{4}A \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} B = -\dfrac{3A}{4}; & (A \neq 0) \\ C = -\dfrac{35}{4}A \end{cases}$$

Các đường thẳng sau là các tiếp tuyến chung của (C) và (C') là:

$$Ax + \frac{3}{4}Ay - \frac{35}{4}A = 0 \ ; \quad Ax - \frac{3}{4}Ay - \frac{35}{4}A = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 35 = 0 \ ; \quad 4x + 3y - 35 = 0$$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của (C) và (C') với phương trình là:

$3x + 4y - 35 = 0 \quad (d_1)$; $3x - 4y - 35 = 0 (d_2)$
$4x + 3y - 35 = 0 \quad (d_3)$; $4x - 3y - 35 = 0 (d_4)$

b. **Tìm 8 tiếp điểm**:

* Xác định tiếp điểm của (d_1): $3x + 4y - 35 = 0$ với (C), (C')

+ Đường thẳng qua O(0; 0) và vuông góc (d_1) có phương trình:

$$4x - 3y = 0$$

Tiếp điểm M_1 của (d_1) và (C) có tọa độ là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{35.3}{25} = \dfrac{21}{5} \\ y = \dfrac{4.35}{25} = \dfrac{28}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M_1(\frac{21}{5}; \frac{28}{5})$$

+ Đường thẳng qua I'(10; 0) và vuông góc (d_1) nên có phương trình:

$$4(x - 10) - 3(y - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3y - 40 = 0$$

Tiếp điểm M_2 của (d_1) và (C') có tọa độ là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 40 = 0 \\ 3x + 4y - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{35.3 + 160}{25} = \dfrac{53}{5} \\ y = \dfrac{4.35 - 3.40}{25} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M_1'(\frac{53}{5}; \frac{4}{5})$$

* Xác định tiếp điểm của (d_2): $3x - 4y - 35 = 0$ với (C), (C')

+ Đường thẳng qua O(0; 0) và vuông góc (d_2) nên có phương trình:

$$4(x - 0) + 3(y - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y = 0$$

Tiếp điểm M_2 của (d_2) và (C) có tọa độ là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x - 4y - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(-35).3}{-25} = \dfrac{21}{5} \\ y = \dfrac{4.35}{-25} = -\dfrac{28}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M_2(\frac{21}{5}; -\frac{28}{5})$$

+ Đường thẳng qua I'(10; 0) và vuông góc (d_2): $3x - 4y - 35 = 0$ có phương trình: $4(x - 10) + 3y = 0$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y - 40 = 0$$

Tiếp điểm M_2' của (d_2) và (C') có tọa độ là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 35 = 0 \\ 4x + 3y - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{105 + 160}{25} = \dfrac{53}{5} \\ y = \dfrac{3.40 - 35.4}{25} = \dfrac{-4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M'_2\left(\frac{53}{5}; -\frac{4}{5}\right)$$

* Xác định tiếp điểm của (d_3) với (C), (C'); (d_3) : $4x + 3y - 35 = 0$

+ Đường thẳng qua O(0; 0) và vuông góc (d_3) có phương trình:

$$3(x - 0) - 4(y - 0) = 0$$

Tọa độ tiếp điểm M_3 của (d_3) và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 35 = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-4.35}{-25} = \dfrac{28}{5} \\ y = \dfrac{-3.35}{-25} = \dfrac{21}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M_3\left(\frac{28}{5}; \frac{21}{5}\right)$$

Tọa độ tiếp điểm M'_3 của (d_4)và (C') là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 35 = 0 \\ 3x - 4y - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-4.35 - 3.30}{-25} = \dfrac{46}{5} \\ y = \dfrac{4.30 - 3.35}{-25} = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M'_3\left(\frac{46}{5}; -\frac{3}{5}\right)$$

* Xác định tiếp điểm của (d_4) với (C), (C'); (d_4): $4x - 3y - 35 = 0$

Tọa độ tiếp điểm M_4 của (d_4) và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 35 = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4.35}{-25} = \dfrac{28}{5} \\ y = \dfrac{-3.35}{25} = -\dfrac{21}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M_4\left(\frac{28}{5}; -\frac{21}{5}\right)$$

Tọa độ tiếp điểm M'_4 của (d_4) và (C') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 3y - 35 = 0 \\ 3x - 4y - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3.30 + 4.30}{25} = \dfrac{46}{5} \\ y = \dfrac{4.30 - 3.35}{25} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M'_4\left(\frac{46}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

Vậy có 8 tiếp điểm:

$M_1\left(\frac{21}{5}; \frac{28}{5}\right)$; $M'_1\left(\frac{53}{5}; \frac{4}{5}\right)$: $M_2\left(\frac{21}{5}; -\frac{28}{5}\right)$; $M'_2\left(\frac{53}{5}; -\frac{4}{5}\right)$

$M_3(\frac{28}{5}; \frac{21}{5})$; $M_3'(\frac{46}{5}; \frac{3}{5})$; $M_4(\frac{28}{5}; -\frac{21}{5})$; $M_4'(\frac{46}{5}; \frac{3}{5})$

* Xét đường thẳng (a) qua M1 ; M1' nhận $\overrightarrow{M_1M_1'} = (\frac{7}{5}; -\frac{7}{5})$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (a): $\frac{7}{5}(x - \frac{21}{5}) + \frac{7}{5}(y - \frac{28}{5}) = 0$

$$\Rightarrow x + y - \frac{49}{5} = 0$$

Ta có: $\frac{53}{5} - \frac{4}{5} - \frac{49}{5} = 0 \Rightarrow N_2(\frac{53}{5}; -\frac{4}{5})$ thuộc đường thẳng (a)

Ta có: $\frac{46}{5} + \frac{3}{5} - \frac{49}{5} = 0 \Rightarrow N_2'(\frac{46}{5}; \frac{3}{5})$ thuộc đường thẳng (a)

Vậy bốn điểm M_1, M_1', N_2, N_2' thẳng hàng

* Xét đường thẳng (b) qua N1 ; N1' nhận $\overrightarrow{N_1N_1'} = (\frac{7}{5}; \frac{7}{5})$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (b): $\frac{7}{5}(x - \frac{21}{5}) - \frac{7}{5}(y - \frac{28}{5}) = 0$

$$\Rightarrow x - y - \frac{49}{5} = 0$$

Ta có: $\frac{53}{5} - \frac{4}{5} - \frac{49}{5} = 0 \Rightarrow M_2(\frac{53}{5}; \frac{4}{5})$ thuộc đường thẳng (b)

Ta có: $\frac{46}{5} + \frac{3}{5} - \frac{49}{5} = 0 \Rightarrow M_2'(\frac{46}{5}; -\frac{3}{5})$ thuộc đường thẳng (b)

Vậy 4 điểm M_2 ; M_2'; N_1 ; N_2' thẳng hàng.

+ **Trường hợp 2: Hai đường tròn C(I; R) và C'(I'; R') tiếp xúc ngoài K**

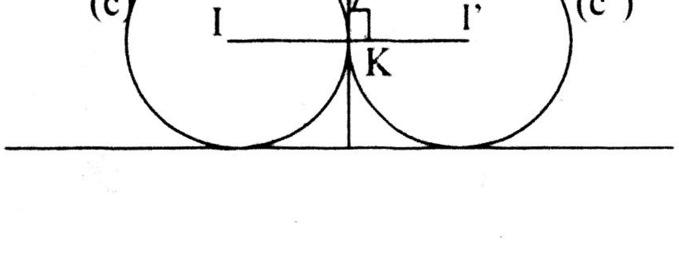
$\Leftrightarrow$ II' = R + R'

Khi đó (C) và (C') có ba tiếp tuyến chung.

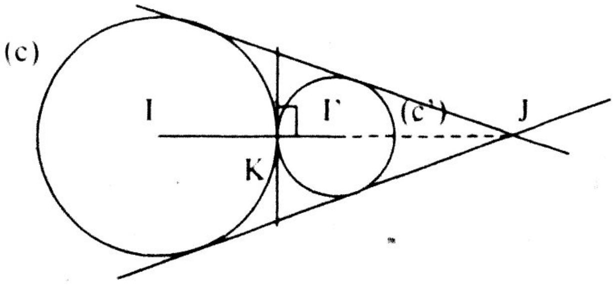
* ***Cách 1***:

Ba tiếp tuyến chung (C) và (C') có một tiếp tuyến chung trong (Δ) tại K vuông góc II' và hai tiếp tuyến chung ngoài .

. Nếu R = R' thì hai tiếp tuyến chung ngoài song song với II'



. Nếu $R \neq R'$ thì hai tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại J và $\frac{JI}{JI'} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \overrightarrow{JI} = \frac{R}{R'}.\overrightarrow{JI'}$



Từ đó tìm tọa độ điểm J

Tiếp tuyến chung của (C) và (C') là tiếp tuyến của (C) hoặc (C') qua J

* ***Cách 2***: Tiếp tuyến chung (Δ) của (C) hoặc (C') có phương trình dạng:

$$Ax + By + C = 0$$

Tìm C, B theo A từ hệ $\begin{cases} d(I, \Delta) = R \\ d(I', \Delta') = R' \end{cases}$

⇒ Phương trình tiếp tuyến chung C

Bài 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình tiếp tuyến chung của (C): $(x-1)^2 + y^2 = 1$ và (C'): $(x-3)^2 + y^2 = 1$

Giải

Ta có I(1; 0), R = 1 lần lượt là tâm và bán kính của (C)

và I'(3; 0), R' = 1 = R lần lượt là tâm và bán kính của (C')

$II' = 2 = R + R' \Rightarrow$ (C) và (C') tiếp xúc ngoài.

⇒ (C) và (C') có ba tiếp tuyến chung.

* ***Cách 1***: Gọi K là tiếp điểm ta có:

$\overrightarrow{KI} = -\frac{R}{R'}\overrightarrow{KI'} \Rightarrow \overrightarrow{KI} = -\overrightarrow{KI'} \Rightarrow$ K là trung điểm đoạn II'

⇒ K(2;0)

Tiếp tuyến chung trong của (C) và (C') qua K(2; 0) và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{II'} = (2; 0)$

⇒ Phương trình tiếp tuyến chung trong là: $2(x-2) + 0(y-0) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$

Hai tiếp tuyến chung ngoài song song đường thẳng II' ($\overrightarrow{II'} = (2; 0)$)

⇒ Phương trình tiếp tuyến chung ngoài (Δ_1) có phương trình

$$0x + 2y + C = 0$$

$\Rightarrow d(I, \Delta_1) = R$

$$\Rightarrow \frac{|C|}{\sqrt{0^2+2^2}} = 1 \quad \Rightarrow |C| = 2 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = 2 \\ C = -2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Hai phương trình tiếp tuyến chung ngoài của (C) và (C') có phương trình:

$2y + 2 = 0$; $2y - 2 = 0$

$\Rightarrow y + 1 = 0$; $y - 1 = 0$

Vậy có ba tiếp tuyến chung của (C) và (C') có phương trình:

$x - 2 = 0$; $y + 1 = 0$; $y - 1 = 0$

*__Cách 2__: Đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) là tiếp tuyến chung của (C) và (C')

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I, \Delta) = R \\ d(I', \Delta') = R' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1 \\ \dfrac{|3A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A+C| = \sqrt{A^2+B^2} \quad (1) \\ |3A+C| = \sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \Rightarrow |A+C| = |3A+C|$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A+C = 3A+C \\ A+C = -(3A+C) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ C = -2A \end{array}\right.$$

+ Với $A = 0 \Rightarrow B \neq 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$

Từ (1) $\Rightarrow |C| = \sqrt{B^2} \Rightarrow C = \pm B$

Khi đó (C) và (C') có hai tiếp tuyến chung là

$By \pm B = 0 \quad \Rightarrow y = \pm 1$

+ Với $C = -2A$

Từ (1) $\Rightarrow |-A| = \sqrt{A^2+B^2} \Rightarrow A^2 = A^2 + B^2 = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A \neq 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$

Khi đó (C) và (C') có hai tiếp tuyến chung với phương trình là:

$Ax - 2A = 0 \quad \Rightarrow x - 2 = 0$

Vậy (C) và (C') có phương trình có ba tiếp tuyến chung

$x - 2 = 0$; $y + 1 = 0$; $y - 1 = 0$

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình tiếp tuyến chung của (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 64$ và (C'): $(x-1)^2 + (y+7)^2 = 1$.

Giải

Ta có: $I(1; 2)$, $R = 8$ lần lượt là tâm và bán kính của (C)

và $I'(1; -7)$, $R' = 1$ lần lượt là tâm và bán kính của (C')

$$II' = \sqrt{(1-1)^2 + (-7-2)^2} = \sqrt{81} = 9 = R + R'$$

$\Rightarrow$ (C) và (C') tiếp xúc ngoài tại K

$\Rightarrow$ (C) và (C') có ba tiếp tuyến chung

* *Cách 1*: Trong ba tiếp tuyến trong đó có một tiếp tuyến chung trong (Δ) của (C) và (C') qua K và (Δ) $\perp$ II'

Hai tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại J (Vì $R \neq R'$)

Ta có: $\dfrac{KI}{KI'} = \dfrac{JI}{JI'} = \dfrac{R}{R'} = 8$

$\Rightarrow \overrightarrow{KI} = -8\overrightarrow{KI'}$ và $\overrightarrow{JI} = 8\overrightarrow{JI'}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{x_I + 8x_{I'}}{9} = 1 \\ y_K = \dfrac{y_I + 8y_{I'}}{9} = -6 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_J = \dfrac{x_I - 8x_{I'}}{-7} = 1 \\ y_J = \dfrac{y_I - 8y_{I'}}{-7} = -\dfrac{58}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow K(1; -6);\ J(1; -\dfrac{58}{7})$

* Phương trình tiếp tuyến chung trong của (C), (C') qua K(1; –6) và nhận vectơ $\overrightarrow{II'} = (0; 9)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$-9(y + 6) = 0 \Rightarrow y + 6 = 0$$

* Phương trình tiếp tuyến chung (Δ_1) của (C), (C') qua $J(1; -\dfrac{58}{7})$ có dạng:

$$A(x-1) + B(y + \frac{58}{7}) = 0 \qquad (\text{với } A^2 + B^2 \neq 0)$$

$\Rightarrow d(I', \Delta_1) = R'$

$$\Rightarrow \frac{\left|B\left(-7 + \dfrac{58}{7}\right)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \Rightarrow |9B| = 7\sqrt{A^2 + B^2}$$

$\Rightarrow 81B^2 = 49(A^2 + B^2)$

$\Rightarrow 32B^2 = 49A^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}B \\ A = -\dfrac{4\sqrt{2}}{7}B \end{array}\right.$$

+ Với $A = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}B \Rightarrow B \neq 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

⇒ Phương trình tiếp tuyến chung (Δ_1) của (C), (C')

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}B(x-1)+B\left(y+\frac{58}{7}\right)=0$$

$\Rightarrow 4\sqrt{2}x+7y+58-4\sqrt{2}=0$

+ Với $A=-\frac{4\sqrt{2}}{7}B \Rightarrow B\neq 0$ (với $A^2+B^2\neq 0$)

⇒ Phương trình tiếp tuyến chung (Δ_1) của (C), (C')

$$-\frac{4\sqrt{2}}{7}B(x-1)+B\left(y+\frac{58}{7}\right)=0$$

$\Rightarrow -4\sqrt{2}x+7y+58+4\sqrt{2}=0$

Vậy (C) và (C') có ba tiếp tuyến chung với phương trình:

$y+6=0$; $4\sqrt{2}x+7y+58-4\sqrt{2}=0$

$-4\sqrt{2}x+7y+58+4\sqrt{2}=0$

Cách 2: Đường thẳng (Δ): $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$ là tiếp tuyến chung của (C) và (C')

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I,\Delta)=R\\ d(I',\Delta)=R'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{|A+2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=8\\[2ex] \dfrac{|A-7B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}|A+2B+C|=8\sqrt{A^2+B^2}\\ |A-7B+C|=\sqrt{A^2+B^2}\quad (1)\end{cases} \Rightarrow |A+2B+C|=8|A-7B+C|$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}A+2B+C=8(A-7B+C)\\ A+2b+C=-8(A-7B+C)\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}7A-58B+7C=0\\ 9A-54B+9C=0\end{array}\right.$$

Kết hợp với (1) ta có:

$$\begin{cases}7A-58B+7C=0\\ |A-7B+C|=\sqrt{A^2+B^2}\end{cases} \quad \text{Hoặc} \quad \begin{cases}9A-54B+9C=0\\ |A-7B+C|=\sqrt{A^2+B^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}C=-A+\dfrac{58}{7}B\\[2ex] \left|A-7B-A+\dfrac{58}{7}B\right|=\sqrt{A^2+B^2}\end{cases} \text{(I) Hoặc} \begin{cases}C=-A+6B\\ |A-7B-A+6B|=\sqrt{A^2+B^2}\end{cases} \text{(II)}$$

*** Giải hệ (I):**

Ta có: (I)

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-A+\frac{58}{7}B \\ |9B|=7\sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-A+\frac{58}{7}B \\ 81B^2=49(A^2+B^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-A+\frac{58}{7}B \\ A^2=\frac{32}{49}B^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C=-A+\frac{58}{7}B \\ \left[\begin{array}{l} A=\frac{4\sqrt{2}}{7}B \\ A=-\frac{4\sqrt{2}}{7}B \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A=\frac{4\sqrt{2}}{7}B \\ C=-\frac{4\sqrt{2}}{7}B+\frac{58}{7} \end{cases} \\ \begin{cases} A=-\frac{4\sqrt{2}}{7}B \\ C=\frac{4\sqrt{2}}{7}B+\frac{58}{7}B \end{cases} \end{array}\right.$$

Khi đó hai tiếp tuyến chung với phương trình:

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}Bx+By+\frac{58}{7}B-\frac{4\sqrt{2}}{7}B=0;\quad -\frac{4\sqrt{2}}{7}Bx+By+\frac{58}{7}B+\frac{4\sqrt{2}}{7}=0$$

$$4\sqrt{2}x+7y+58-4\sqrt{2}=0;\qquad -4\sqrt{2}x+7y+58+4\sqrt{2}=0$$

***Giải hệ II:**

$$\text{Ta có: (II)} \Rightarrow \begin{cases} C=-A+6B \\ |-B|=\sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-A+6B \\ B^2=A^2+B^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C=-A+6B \\ A=0\,(B\neq 0 \text{ vì } A^2+B^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0;\ B\neq 0 \\ C=6B \end{cases}$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến chung của (C), (C') là:

$By+6B=0$

$\Rightarrow y+6=0$ (vì $B\neq 0$)

Vậy (C) và (C') có ba tiếp tuyến chung với phương trình:

$y+6=0$; $4\sqrt{2}x+7y+58-4\sqrt{2}=0$

$-4\sqrt{2}x+7y+58+4\sqrt{2}=0$

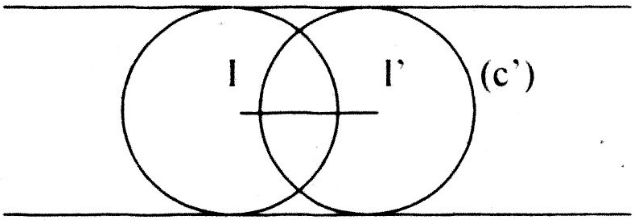
+ **Trường hợp 3: Hai đường tròn C(I; R) và C'(I'; R') cắt nhau:**

$$\Leftrightarrow |R-R'|<II'<R+R'$$

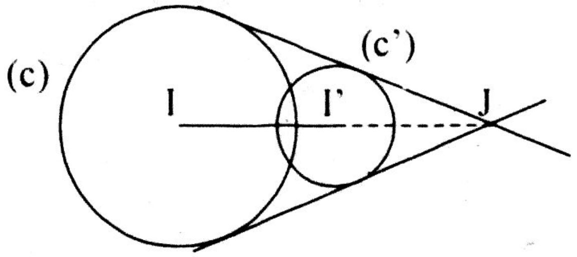
Khi đó (C) và (C') có hai tiếp tuyến chung.

Cách 1:

+ Nếu R = R' thì hai tiếp tuyến chung song song với đường thẳng II'



+ Nếu R $\neq$ R' thì hai tiếp tuyến chung cắt nhau tại J $\Rightarrow \overrightarrow{JI} = \frac{R}{R'}.\overrightarrow{JI'} \Rightarrow$ J



$\Rightarrow$ Tiếp tuyến chung của (C) và (C') là tiếp tuyến của một đường tròn trong hai đường tròn (C) và (C') qua J

Cách 2: Đường thẳng (Δ): Ax + By + C = 0 ($A^2 + B^2 \neq 0$) là tiếp tuyến chung của (C) và (C')

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I, \Delta) = R \\ d(I', \Delta') = R' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \text{ theo } B \\ A \text{ theo } B \end{cases}$$

Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy tìm tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C); (C').

1. (C): $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$
2. (C): $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$

Giải

1. (C) có tâm I(5; −12); bán kính $R = \sqrt{25 + 144 - (-56)} = \sqrt{225} = 15$

(C') có tâm I'(1; 2); bán kính $R' = \sqrt{1 + 4 - (-20)} = 5$

Ta có: $\overrightarrow{II'} = (-4; 14) \Rightarrow II' = \sqrt{16 + (14)^2} = \sqrt{212} \Rightarrow |R - R'| < II' < R + R'$

$\Rightarrow$ (C) và (C') cắt nhau

$\Rightarrow$ (C) và (C') có hai tiếp tuyến chung

Cách 1: Hai tiếp tuyến chung của (C) và (C')

$\Rightarrow$ Ta có: $\frac{JI}{JI'} = \frac{R}{R'} = 3$

$$\Rightarrow \overrightarrow{JI'} = 3\overrightarrow{JI'} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_J = \dfrac{x_I - 3x_{I'}}{-2} = -1 \\ y_J = \dfrac{y_I - 3y_{I'}}{-2} = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow J(-1; 9)$$

Hai tiếp tuyến chung của hai đường tròn J(−1; 9) nên phương trình có dạng:

$A(x + 1) + B(y - 9) = 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$) (Δ)

Ta có: $d(I', \Delta) = R'$

$$\Leftrightarrow \frac{|2A + (-7B)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 5 \Leftrightarrow (2A - 7B)^2 = 5\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow 4A^2 + 49B^2 - 28AB = 25(A^2 + B^2)$$

$$\Leftrightarrow 21A^2 + 28AB - 24B^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{-14B + 10B\sqrt{7}}{21} = \dfrac{-14 + 10\sqrt{7}}{21}B \\ A = (\dfrac{-14 - 10\sqrt{7}}{21})B \end{array}\right. \quad (B \neq 0 \text{ vì } A^2 + B^2 \neq 0)$$

+ Với $A = \dfrac{-14 + 10\sqrt{7}}{21}B \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Ta có phương trình tiếp tuyến chung của(C) và (C'):

$$\frac{-14 + 10\sqrt{7}}{21}B(x + 1) + B(y - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-14 + 10\sqrt{7})(x + 1) + 21(y - 9) = 0 \quad (\text{vì } B \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (-14 + 10\sqrt{7})x + 21y - 203 + 10\sqrt{7} = 0$$

+ Với $A = \dfrac{-14 - 10\sqrt{7}}{21}B \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Ta có phương trình tiếp tuyến chung của(C) và (C'):

$$\frac{-14 - 10\sqrt{7}}{21}B(x + 1) + B(y - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-14 - 10\sqrt{7})x + 21y - 203 - 10\sqrt{7} = 0$$

Vậy có hai tiếp tuyến chung của(C) và (C') với phương trình là:

$(-14 + 10\sqrt{7})x + 21y - 203 + 10\sqrt{7} = 0$

$(-14 - 10\sqrt{7})x + 21y - 203 - 10\sqrt{7} = 0$

Cách 2: Đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) là tiếp tuyến chung của (C) và (C')

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I,\ \Delta) = R \\ d(I',\ \Delta) = R' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|5A - 12B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 15 \\ \dfrac{|A + 2B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |5A - 12B + C| = 3 \cdot 5\sqrt{A^2 + B^2} \\ |A + 2B + C| = 5\sqrt{A^2 + B^2} \qquad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |5A - 12B + C| = 3|A + 2B + C|$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5A - 12B + C = 3(A + 2B + C) \\ 5A - 12B + C = -3(A + 2B + C) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = A - 9B \\ C = -2A + \dfrac{3}{2}B \end{array}\right.$$

Kết hợp với (1) ta có:

$$\Rightarrow \begin{cases} C = A - 9B \\ |A + 2B + C| = 5\sqrt{A^2 + B^2} \end{cases} \text{(I) hoặc } \begin{cases} C = -2A + \dfrac{3}{2}B \\ |A + 2B + C| = 5\sqrt{A^2 + B^2} \end{cases} \text{(II)}$$

*** Giải hệ (I):**

Ta có: (I) $\Rightarrow \begin{cases} C = A - 9B \\ |A + 2B + A - 9B| = 5\sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow |2A - 7B| = 5\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow (2A - 7B)^2 = 25(A^2 + B^2)$$

$$\Rightarrow 21A^2 + 28AB - 24B^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{-14 + 10\sqrt{7}}{21}B \\ A = \left(\dfrac{-14 - 10\sqrt{7}}{21}\right)B \end{array}\right. \quad (B \neq 0 \text{ vì } A^2 + B^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-14 + 10\sqrt{7}}{21}B;\ B \neq 0 \\ C = \dfrac{-14 + 10\sqrt{7}}{21}B - 9B = \dfrac{10\sqrt{7} - 203}{21}B \end{cases}$$

$$\text{Hoặc}\begin{cases} A = \dfrac{-14-10\sqrt{7}}{21}B;\ \ B \neq 0 \\ C = \dfrac{-14-10\sqrt{7}}{21}B - 9B = \dfrac{-10\sqrt{7}-203}{21}B \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Có hai tiếp tuyến chung của (C) và (C')

$$\frac{-14+10\sqrt{7}}{21}Bx + By + \frac{10\sqrt{7}-203}{21}B = 0;$$

$$\frac{-14-10\sqrt{7}}{21}Bx + By + \frac{10\sqrt{7}-203}{21}B = 0$$

$\Rightarrow (-14 + 10\sqrt{7})x + 21y - 203 + 10\sqrt{7} = 0$

$\Rightarrow (-14 - 10\sqrt{7})x + 21y - 203 - 10\sqrt{7} = 0$

Vậy có hai tiếp tuyến chung của (C) và (C') với phương trình là:

$(-14 + 10\sqrt{7})x + 21y - 203 + 10\sqrt{7} = 0$

$(-14 - 10\sqrt{7})x + 21y - 203 - 10\sqrt{7} = 0$

***Giải hệ (II):**

$$\text{Ta có: (II)} \Rightarrow \begin{cases} C = -2A + \dfrac{3}{2}B \\ \left|A + 2B - 2A + \dfrac{3}{2}B\right| = 5\sqrt{A^2+B^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{7B}{2} - A\right| = 5\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7B}{2} - A\right)^2 = 25(A^2+B^2)$$

$\Rightarrow 24A^2 + 7AB + \dfrac{51}{4}B^2 = 0$ (*): phương trình vô nghiệm .

(Vì $\Delta = 49B^2 - 24.51B^2 < 0;\ \forall B \neq 0$

Nếu $B = 0$, từ (*) $\Rightarrow A = 0$ (không thỏa mãn $A^2 + B^2 \neq 0$)

Vậy có hai tiếp tuyến chung của (C) và (C') với phương trình là:

$(-14 + 10\sqrt{7})x + 21y - 203 + 10\sqrt{7} = 0$

$(-14 - 10\sqrt{7})x + 21y - 203 - 10\sqrt{7} = 0$

2. (C) có tâm I(3; 0); bán kính $R = 2$

(C') có tâm I'(3; 3); bán kính $R' = 2 = R$

$\Rightarrow II' = \sqrt{(3-3)^2+(3)^2} = 3$

$\Rightarrow |R + R'| < II' < R + R'$

$\Rightarrow$ (C) và (C') cắt nhau $\Rightarrow$ (C) và (C') có hai tiếp tuyến chung.

Ta có: R = R' nên hai tiếp tuyến chung của (C) và (C') song song đường thẳng II'

Ta có: $\overrightarrow{II'} = (0; 3) \Rightarrow \vec{n} = (3; 0)$ là một vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến chung (Δ) của (C) và (C') (vì $\vec{n} \perp \overrightarrow{II'}$)

$\Rightarrow$ Phương trình (Δ) là: $3x + C = 0$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = R \Rightarrow \frac{|3.3 + C|}{\sqrt{3^2 + 0^2}} = 2$$

$$\Rightarrow |9 + C| = 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C + 9 = 6 \\ C + 9 = -6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = -3 \\ C = -15 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Có hai tiếp tuyến chung của (C) và (C') với phương trình là:

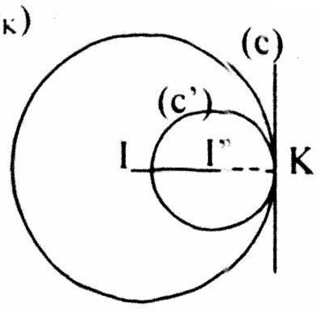
$3x - 3 = 0$; $\quad 3x - 15 = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0$; $\quad x - 5 = 0$

+ Trường hợp 4: Hai đường tròn C(I; R) và C'(I'; R') tiếp xúc trong:

$\Leftrightarrow |R - R'| = II'$

Khi đó (C) và (C') có một tiếp tuyến chung tại điểm $K(x_K; y_K)$



* Tiếp tuyến chung này qua $K(x_K; y_K)$

và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{II'} = (A; B)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung của (C) và (C') là:

$$A(x - x_K) + B(y - y_K) = 0$$

Tọa độ điểm điểm K xác định từ hệ thức:

$$\overrightarrow{KI} = \frac{R}{R'} \overrightarrow{KI'}$$

Bài 24. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn

$(C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$ và $(C'): (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

Giải

(C) có tâm I(1; −2); bán kính R = 6

(C') có tâm I'(−3; 1); bán kính R' = 1

$\Rightarrow II' = \sqrt{(-3-1)^2 + (1+2)^2} = 5 \Rightarrow |R - R'| = II'$

$\Rightarrow$ (C) và (C') tiếp xúc trong tại K

$\Rightarrow$ (C) và (C') có một tiếp tuyến chung (Δ) tại K

Ta có: $\dfrac{KI}{KI'} = \dfrac{R}{R'} = 6 \Rightarrow \overrightarrow{KI} = 6\overrightarrow{KI'}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{x_I - 6x_{I'}}{1-6} = \dfrac{19}{-5} \\ y_K = \dfrac{y_I - 6y_{I'}}{1-6} = \dfrac{-2-6}{-5} = \dfrac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow K(-\dfrac{19}{5};\ \dfrac{8}{5})$$

Tiếp tuyến chung (Δ) của (C) và (C') qua K $(-\dfrac{19}{5}; \dfrac{8}{5})$ và nhận $\overrightarrow{II'} = (-4; 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $-4(x + \dfrac{19}{5}) + 3(y - \dfrac{8}{5}) = 0$

$$\Rightarrow 4x - 3y + 20 = 0$$

Vậy phương trình tiếp tuyến chung của (C) và (C') với phương trình là:

$4x - 3y + 20 = 0.$

Bài toán tổng hợp

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho (C_m):

$$x^2 + y^2 + 2mx - 2(m-1)y + 1 = 0$$

1. Xác định m để (C_m) là đường tròn. Tìm quỹ tích tâm của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

2. Viết phương trình đường tròn (C_m) biết nó có bán kính bằng $2\sqrt{3}$

3. Tính bán kính đường tròn (C_m) biết nó tiếp xúc với đường thẳng (Δ): $3x - 4y = 0$

4. Định (C_m) để từ A(7; 0) kẻ được hai tiếp tuyến với (C_m) và 2 tiếp tuyến đó hợp với nhau một góc 60^0.

Giải

Ta có: $A = m;\ B = -(m-1);\ C = 1$

1. * (C_m) là đường tròn ⇔ $A^2 + B^2 - C = m^2 + (m-1)^2 - 1 = 2m^2 - 2m > 0$

⇔ $m < 0$ hoặc $m > 1$

* Khi đó (C_m) có tâm I $(-m; m-1) \Rightarrow \begin{cases} x_I = -m \\ y_I = m-1 \end{cases} \Rightarrow x_I + y_I = -1 \Rightarrow y_I = -x_I - 1$

⇒ Tâm I của đường tròn (C_m) thuộc đường thẳng (Δ): $y = -x - 1$

Do $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -m > 0 \\ -m < -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_I > 0 \\ x_I < -1 \end{array}\right.$

Vậy quỹ tích tâm I của (C_m) là đường thẳng (Δ) : $y = -x - 1$ trừ đoạn có $-1 \le x \le 0$

2. Khi m < 0 hoặc m > 1, (C_m) có bán kính là :

$$R=\sqrt{m^2+(m-1)^2-1}=\sqrt{2m^2-2m}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}=\sqrt{2m^2-2m} \qquad (\text{vì } R=2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow 12=2m^2-2m \Rightarrow m^2-m-6=0 \Rightarrow m=-2 \text{ hoặc } m=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

* Với m = – 2, ta có phương trình đường tròn là: $x^2+y^2-4x+6y+1=0$

* Với m = 3, ta có phương trình đường tròn là: $x^2+y^2+6x-4y+1=0$

3. Khi m < 0 hoặc m >1; (C_m) có bán kính $R=\sqrt{2m^2-2m}$

Theo đề ta có: d(I, Δ) = R .Với (Δ): 3x – 4y = 0 và I(–m ; m – 1)

$$\Leftrightarrow \frac{|-3m-4(m-1)|}{\sqrt{9+16}}=\sqrt{2m^2-2m} \qquad \Leftrightarrow \quad |-7m+4|=5\sqrt{2m^2-2m}$$

$$\Leftrightarrow (-7m+4)^2=25(2m^2-2m) \qquad \Leftrightarrow \quad m^2+6m-16=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-8 \end{array}\right. \quad \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

* Với m = 2 ta có $R=\sqrt{4}=1\times 2=2$

* Với m = –8 ta có $R=\sqrt{128+16}=\sqrt{144}=12$

4. Khi m < 0 hoặc m > 1 (*); (C_m) là đường tròn có tâm I(–m; –m – 1) và bán kính $R=\sqrt{2m^2-2m}$.

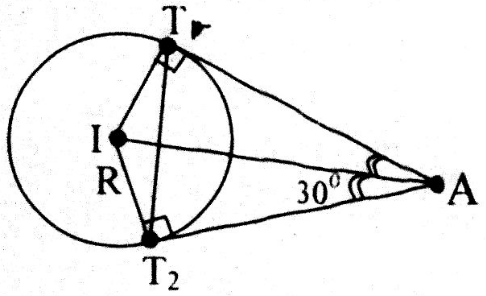
Qua A kẻ được 2 tiếp tuyến với (C_m) khi A ở bên ngoài $(C_m) \Leftrightarrow IA > R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(7+m)^2+(1-m)^2}>\sqrt{2m^2-2m}$$

$$\Leftrightarrow 14m+50>0 \Leftrightarrow m>-\frac{25}{7}$$

kết hợp (*) ta có:

$$-\frac{25}{7}<m<0 \text{ hoặc } m>1 \quad \text{(I)}$$



Hai tiếp tuyến của (C_m) đi qua A có tiếp điểm lần lượt là T_1; T_2 $\Rightarrow \Delta\ T_1T_2A$ là tam giác đều (vì góc giữa 2 tiếp tuyến là 60^0)

$$\Rightarrow IA = 2IT_2 \text{ mà } IT_2 = R$$

$$\Rightarrow IA^2=(2R)^2$$

$$\Rightarrow (7+m)^2+(1-m)^2=4(2m^2-2m)$$

$$\Rightarrow 6m^2-20m-50 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \quad \text{(thoả mãn điều kiện (I))}$$

$\Rightarrow$ Vậy giá trị cần tìm của m là: $m=5;\ m=-\frac{5}{3}$

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho họ (C_m):

$$x^2 + y^2 + mx + 2(m-3)y - \frac{3m^2}{4} + 2m = 0$$

1. Chứng minh (C_m) là đường tròn $\forall m \in R$
2. Viết phương trình đường tròn (C_m) có bán kính nhỏ nhất
3. Tìm m để đường tròn (C_m) qua A(3; 3)
4. Tìm bán kính của đường tròn (C_m) tiếp xúc Ox.

Giải

Ta có $A = \frac{m}{2}$; $B = m - 3$; $C = -\frac{3m^2}{4} + 2m$

1. $A^2 + B^2 - C = \frac{m^2}{4} + (m-3)^2 + \frac{3m^2}{4} - 2m$

$= 2m^2 - 8m + 9 > 0$, $\forall m \in \mathbf{R}$ (vì $\Delta' = 16 - 18 < 0$)

$\Rightarrow$ (C_m) là đường tròn với $\forall m \in R$

2. Ta có: bán kính của (C_m) là:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - C} = \sqrt{2m^2 - 8m + 9} = \sqrt{2(m-2)^2 + 1} \geq 1 \ ; \ \forall m \in \mathbf{R}$$

Vậy bán kính của (C_m) nhỏ nhất bằng 1 $\Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Khi đó phương trình của đường tròn có bán kính nhỏ nhất là: $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

3. (C_m) qua A(3; 3)

$$\Leftrightarrow 18 + 3m + 6(m-3) - \frac{3m^2}{4} + 2m = 0 \Leftrightarrow 11m - \frac{3m^2}{4} = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = \frac{44}{3}$$

4. (C_m) tiếp xúc Ox $\Leftrightarrow$ d(I, Ox) = R với $I\left(-\frac{m}{2}; 3 - m\right)$

$$\Leftrightarrow |3 - m| = \sqrt{2m^2 - 8m + 9} \Leftrightarrow (m-3)^2 = 2m^2 - 8m + 9$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

* Với m = 0 ta có bán kính của đường tròn là R = 3

* Với m = 2 ta có bán kính của đường tròn là R = 1

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa Oxy cho (C): $x^2 + y^2 - 1 = 0$ và (C_m) :

$$x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 6 = 0$$

1. Tìm quỹ tích tâm đường tròn (C_m).

2. Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_m) tiếp xúc với (C) ứng với hai giá trị m. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó?

Giải

1. Ta có $A = -(m+1)$; $B = 2m$; $C = -5 \Rightarrow A^2 + B^2 - C > 0;\ \forall m \in R$

$\Rightarrow (C_m)$ là đường tròn với $\forall\, m \in \mathbf{R}$

Khi đó đường tròn (C_m) có tâm $I(m+1; -2m)$, bán kính

$$R = \sqrt{(m+1)^2 + (2m)^2 + 6} = \sqrt{5m^2 + 2m + 6}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_I = m+1 \\ y_I = -2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_I = 2m+2 \\ y_I = -2m \end{cases} \Leftrightarrow 2x_I + y_I - 2 = 0$$

Vậy quỹ tích tâm I của (C_m) là đường thẳng (Δ) $2x + y - 2 = 0$

2. Ta có: $O(0; 0)$; $R_C = 1$ lần lượt là tâm và bán kính của (C)

$I(m+1; -2m)$; $R = \sqrt{5m^2 + 2m + 6}$ lần lượt là tâm và bán kính của (C_m)

Do đó $OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$

* Trường hợp 1: (C_m) và (C) tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow OI = R + R_C$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 1} = 1 + \sqrt{5m^2 + 2m + 6}$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m + 1 = 1 + 5m^2 + 2m + 6 + 2\sqrt{5m^2 + 2m + 6}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 5} = -3 \qquad \text{phương trình vô nghiệm}$$

*Trường hợp 2: (C_m) và (C) tiếp xúc trong $\Rightarrow |R - R_C| = OI$

$$\Leftrightarrow R - R_C = OI \quad (\text{vì } R = \sqrt{5m^2 + 2m + 6} = \sqrt{(\sqrt{5}m + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{24}{5}} > 1 = R_C)$$

$$\Leftrightarrow R = OI + R_C \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 6} = 1 + \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m + 6 = 1 + 5m^2 + 2m + 1 + 2\sqrt{5m^2 + 2m + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m - 1} = 2 \Leftrightarrow 5m^2 + 2m + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m - 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy có hai giá trị m để (C_m) tiếp xúc trong với (C)

*** Trường hợp1**: $m = -1$. Ta có : (C_{-1}): $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ có tâm $I_1(0; 2)$, bán kính $R_1 = 3$

*** Trường hợp 2**: $m = \frac{3}{5}$; $(C_{\frac{3}{5}})$: $x^2 + y^2 - \frac{16}{5}x + \frac{12}{5}y - 5 = 0$ có tâm $I_2(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5})$, bán kính $R_2 = 3$

Mặt khác ta có $I_1I_2 = \sqrt{(\frac{8}{5})^2 + (-\frac{6}{5} - 2)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5} < R_1 + R_2 = 6$

và $I_1I_2 > |R_1 - R_2| = 0$

$\Rightarrow (C_{-1})$; $(C_{\frac{3}{5}})$ cắt nhau

Vậy (C_{-1}); $(C_{\frac{3}{5}})$ có hai tiếp tuyến chung chung song song với đường thẳng I_1I_2

Ta có $\overrightarrow{I_1I_2} = (\frac{8}{5}; -\frac{16}{5}) = \frac{8}{5}(1; -2)$

$\Rightarrow$ Hai tiếp tuyến chung nhận $\vec{u}\,(1; -2)$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung có dạng $2x + y + C = 0\ (\Delta)$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|2 + C|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow |2 + C| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow C = -2 \pm 3\sqrt{5}$$

Vậy hai tiếp tuyến chung của (C_{-1}); $(C_{\frac{3}{5}})$ là: $2x + y \pm 3\sqrt{5} = 0$

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho (C_m):

$$x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$$

1. Tìm quỹ tích tâm (C_m).
2. Chứng minh rằng (C_m) đi qua hai điểm cố định.
3. Cho $m = -2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C_{-2}) kẻ từ $A_1\ (0; 1)$.

Giải

(C_m): $x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$; $A = -\frac{m-2}{2}$; $B = m$; $C = -1$

$\Rightarrow A^2 + B^2 - C > 0$ với $\forall m \in \mathbf{R} \Rightarrow (C_m)$ là đường tròn với $\forall m \in \mathbf{R}$

1. Đường tròn (C_m) có tâm $I\left(\frac{m-2}{2}; -m\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m-2}{2} \\ y_1 = -m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = m - 2 \\ y_1 = -m \end{cases} \Rightarrow 2x_1 + y_1 + 2 = 0$$

$\Rightarrow$ I thuộc đường thẳng $2x + y - 2 = 0$

Vậy quỹ tích tâm I của (C_m) là đường thẳng $2x + y - 2 = 0$

2. Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là điểm cố định của (C_m)

Ta có: $x_0^2 + y_0^2 - (m - 2)x_0 + 2my_0 - 1 = 0$; $\forall m \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow (2y_0 - x_0)m + (x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1) = 0$; $\forall m \in \mathbf{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_0 - x_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ 4y_0^2 + y_0^2 + 4y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ 5y_0^2 + 4y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = \frac{2}{5} \\ y_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy (C_m qua hai điểm cố định $(-2; -1)$; $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

3. (C_{-2}) có tâm $I_1(-2; 2)$, bán kính $R_1 = 3$

Đường thẳng (Δ) qua $A(0; 1)$ có phương trình dạng: $Ax + B(y + 1) = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

(Δ) là tiếp tuyến của (C_{-2}) $\Leftrightarrow d(I_1, \Delta) = R_1$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2A + 3B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \qquad \Leftrightarrow \quad |3B - 2A| = 3\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow (3B - 2A)^2 = (3\sqrt{A^2 + B^2})^2 \qquad \Leftrightarrow 9B^2 + 4A^2 - 12AB = 9(A^2 + B^2)$$

$$\Leftrightarrow 5A^2 + 12AB = 0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \qquad\qquad (*) \\ A = -\frac{12B}{5} \end{array}\right.$$

*Với $A = 0 \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C_{-2}) qua A_1 (0; 1) là:

$B(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y + 1 = 0$ (vì $B \neq 0$)

*Với $A = -\frac{12B}{5} \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C_{-2}) qua A_1 (0; −1) là:

$$-\frac{12B}{5}(x - 0) + B(y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -12x + 5y + 5 = 0$$

Vậy qua A_1 (0; −1) có hai tiếp tuyến với (C_{-2}) là:

$y + 1 = 0$; $-12x + 5y + 5 = 0$

Bài 5. Tìm giá trị m để hệ bất phương trình : $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq m \\ (x+1)^2 + y^2 \leq m \end{cases}$ (*)

có nghiệm duy nhất ?

Giải

Trường hợp 1: $m < 0$

Hệ (*) trở thành: $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq m < 0 \\ (x+1)^2 + y^2 \leq m < 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm)

Trường hợp 2: $m = 0$

Hệ (*) trở thành: $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 0 & (1) \\ (x+1)^2 + y^2 \leq 0 & (2) \end{cases}$

Mặt khác ta có $x^2 + (y + 1)^2 \geq 0$ (3)

Từ (1), (3) ta có phương trình: $x^2 + (y + 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \quad (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} (5)$$

Ta nhận thấy (5) không thỏa mãn (2). Do đó hệ (*) vô nghiệm khi m = 0.

Trường hợp 3: $m > 0$

Xét đường tròn (C_1): $x^2 + (y+1)^2 = m$ có tâm $I_1(0\ ;\ -1)$; bán kính $R_1 = \sqrt{m}$

và đường tròn (C_2): $(x+1)^2 + y^2 = m$ có tâm $I_2(-1\ ;\ 0)$; bán kính $R_2 = \sqrt{m}$

+ Tập hợp các điểm có tọa độ (x ; y) thỏa mãn bất phương trình: $x^2 + (y+1)^2 \le m$ là đường tròn (C_1) và các điểm bên trong đường tròn (C_1)

+ Tập hợp các điểm có tọa độ (x ; y) thỏa mãn bất phương trình: $(x+1)^2 + y^2 \le m$ là đường tròn (C_2) và các điểm bên trong đường tròn (C_2) .

Do vậy hệ (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (C_1) ; (C_2) tiếp xúc ngoài

$$\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $m = \dfrac{1}{2}$

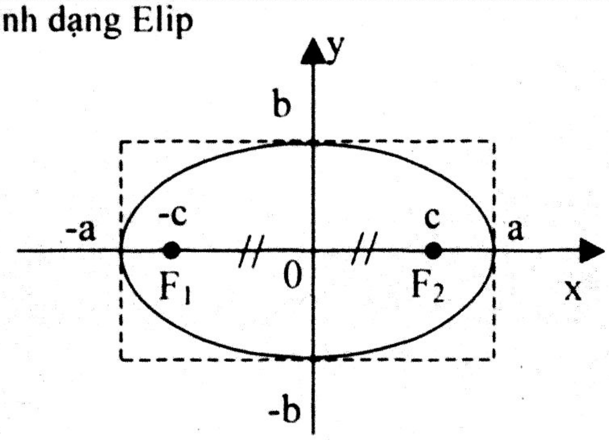
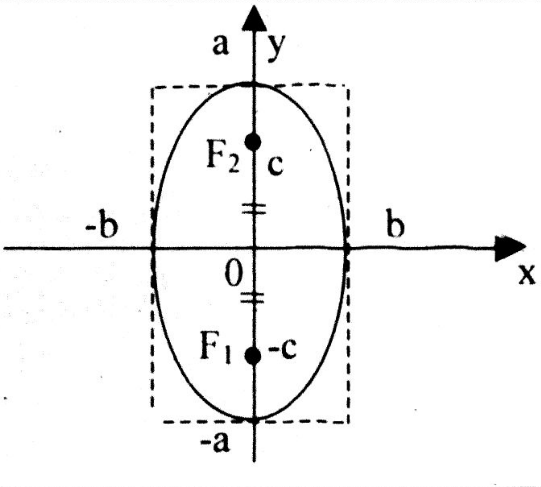
ELIP (E)

A. GHI NHỚ:

I. Định nghĩa: $M \in (E) \Leftrightarrow F_1M + F_2M = 2a \ (a > 0)$, ($F_1F_2 = 2c < 2a; \ c > 0$)

II. Các yếu tố của (E):

(E) có tâm đối xứng O(0; 0), hai trục đối xứng Ox; Oy

Các yếu tố của (E)	(E) có tiêu điểm ∈ Ox	(E) có tiêu điểm ∈ Oy
Phương trình ($a > b > 0$)	Phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Tiêu cự	$F_1F_2 = 2c$; ($c^2 = a^2 - b^2$)	
Tâm sai	$e = \frac{c}{a}$; ($0 < e < 1$)	
Độ dài trục lớn	2a	
Độ dài trục bé	2b	
Bốn đỉnh	Cho $x = 0 \Rightarrow y$ và $y = 0 \Rightarrow x$	
PT các đường chuẩn	$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$	$y = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$
Tiếp tuyến của (E) tại $M_0(x_0; y_0) \in (E)$	$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$	$\frac{x_0x}{b^2} + \frac{y_0y}{a^2} = 1$
Đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc (E), điều kiện:	$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$	$a^2B^2 + b^2A^2 = C^2$
Bán kính qua tiêu ứng với $M(x_M; y_M) \in (E)$	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.5\frac{\lvert 12\sin t + 12\cos t - 12\rvert}{5} = 6$ $\Leftrightarrow \lvert \sin t + \cos t - 1\rvert = 1$	$F_1M = a + \frac{c}{a}y_M = a + ey_M$ $F_2M = a - \frac{c}{a}y_M = a - ey_M$
Hình dạng Elip		

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP:

I. Dạng I: Tìm điểm $M \in (E)$ thỏa mãn điều kiện (*) cho trước.

Phương pháp: * $M(x_M; y_M) \in (E)$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình (E)

$\Rightarrow$ Phương trình (1) theo $M(x_M; y_M)$

* Khai thác điều kiện (*) được phương trình (2) theo $M(x_M; y_M)$

* Giải hệ $\begin{cases} \text{phương trình (1)} \\ \text{phương trình (2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M \\ y_M \end{cases}$

Bài 1. Tìm $M \in (E)$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ thỏa mãn $3MF_1 = 2MF_2$ (*)

Giải

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ c = 3 \end{cases}$

$M(x_M; y_M) \in (E)$ thỏa mãn (*) ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_M{}^2}{25} + \dfrac{y_M{}^2}{16} = 1 \quad \text{với} \begin{cases} -5 \le x_M \le 5 \\ -4 \le y_M \le 4 \end{cases} \\ 3(a + \dfrac{c}{a} x_M) = 2(a - \dfrac{c}{a} x_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_M{}^2}{25} + \dfrac{y_M{}^2}{16} = 1 \\ 3(5 + \dfrac{3}{5} x_M) = 2(5 - \dfrac{3}{5} x_M) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M{}^2 = (\dfrac{8}{3})^2 \cdot 2 \\ x_M = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = \pm \dfrac{8\sqrt{2}}{3} \\ x_M = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_M = -\dfrac{5}{3} \\ y_M = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x_M = -\dfrac{5}{3} \\ y_M = -\dfrac{8\sqrt{2}}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{8\sqrt{2}}{3}) \\ M(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{8\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$$

Bài 2. (E): $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$. Tìm điểm thuộc (E) thỏa mãn:

1. Có tọa độ nguyên.
2. Có tổng 2 tọa độ đạt:
   a. Giá trị lớn nhất.
   b. Giá trị nhỏ nhất.

Giải

1. ***Cách 1***:

Nhận xét: M(x; y) ∈ (E) thì các điểm (−x; y); (−x; −y); (x; −y) cũng thuộc (E).

Do đó ta chỉ xét $M(x_0;y_0) \in (E)$ với $x_0;y_0 \in \mathbf{Z}_+$

$$* \ M(x_0;y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{8}=1 \Leftrightarrow y_0^2 = 8-4x_0^2 \qquad (1)$$

Tồn tại thoả mãn (1) $\Leftrightarrow 8-4x_0^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x_0 \leq \sqrt{2}$ (2)

Do $x_0 \in Z_+$ nên từ (2) ta có $x_0 = 0; 1$

+ Với $x_0 = 0$, từ (1) $\Rightarrow y_0 = \pm 2\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}_+$

+ Với $x_0 = 1$, từ (2) :

$\Rightarrow y_0^2 = 4$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 2 \\ y_0 = -2 \notin \mathbf{Z}_+ \end{array}\right.$$

$\Rightarrow M(1; 2) \in (E)$ thỏa mãn bài toán:

Do đó các điểm cần tìm thuộc (E) là: (1; 2); (−1; −2); (−1; −2); (1; −2)

Cách 2: $M(x_0;y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{8}=1$

$$\text{Đặt} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_0}{\sqrt{2}} = \sin t \\ \dfrac{y_0}{2\sqrt{2}} = \cos t \end{array}\right. ; \qquad \forall\, t \in [0; 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{2}\sin t \\ y_0 = 2\sqrt{2}\cos t \end{array}\right. ; \qquad \forall t \in [0;\, 2\pi)$$

Ta có $t \in [0;\, 2\pi)$ để $x_0;y_0 \in Z$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \quad \text{hoặc} \quad t = \frac{3\pi}{4} \quad \text{hoặc} \quad t = \frac{5\pi}{4} \quad \text{hoặc} \quad t = \frac{7\pi}{4}$$

Khi đó: * Với $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow M(1; 2)$

* Với $t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow M(1; -2)$

* Với $t = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow M(-1;\, -2)$

* Với $t = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow M(-1;\, 2)$

2. $M(x_0;y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1$ với $\begin{cases} -\sqrt{2} \le x_0 \le \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \le y_0 \le 2\sqrt{2} \end{cases}$

* Xác định M để: $x_0 + y_0$ đạt giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất

Cách 1:

Ta có $(x_0 + y_0)^2 = \left[\sqrt{2}.\frac{x_0}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\frac{y_0}{2\sqrt{2}}\right]^2 \le (2+8)(\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8}) = 10$ (1)

$\Leftrightarrow -\sqrt{10} \le x_0 + y_0 \le \sqrt{10}$ (*)

(1) xảy ra dấu " = "

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1 \\ \frac{\frac{x_0}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{y_0}{2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1 \\ \frac{x_0}{2} = \frac{y_0}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{2} + \frac{16x_0^2}{8} = 1 \\ y_0 = 4x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 4x_0 \\ 5x_0^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 4x_0 \\ x_0 = \pm\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = \frac{4\sqrt{10}}{5} \\ y_0 = \frac{4\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = \frac{-\sqrt{10}}{5} \\ y_0 = -\frac{4\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M\left(\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right) \\ M\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}; -\frac{4\sqrt{10}}{5}\right) \end{array}\right.$$

Vậy a. $x_0 + y_0$) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{10}$ khi $M\left(\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

b. $x_0 + y_0$) đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\sqrt{10}$ khi $M\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}; -\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

Cách 2: $M(x_0 + y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1$ với $\begin{cases} -\sqrt{2} \le x_0 \le \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \le y_0 \le 2\sqrt{2} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \frac{x_0}{\sqrt{2}} = \sin t \\ \frac{y_0}{2\sqrt{2}} = \cos t \end{cases}$ $\forall t \in [0;2\pi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{2}\sin t \\ y_0 = 2\sqrt{2}\cos t \end{cases} \Rightarrow x_0 + y_0 = \sqrt{2}\sin t + 2\sqrt{2}\cos t$$

$$\Rightarrow \sqrt{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\sin t + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\cos t\right)$$

chọn

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} > 0 \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} > 0 \end{cases} \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \sqrt{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\sin t + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\cos t\right) = \sqrt{10}\cos(t - \varphi)$$

Ta có: $-1 \le \cos(t - \varphi) \le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \le x_0 + y_0 \le \sqrt{10}$

* $x_0 + y_0 = \sqrt{10} \Leftrightarrow \cos(t - \varphi) = 1 \Leftrightarrow t - \varphi = 0 \Leftrightarrow t = \varphi$

Khi đó: $\begin{cases} \cos t = \cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin t = \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ y_0 = \dfrac{4\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$$

* $x_0 + y_0 = -\sqrt{10} \Leftrightarrow \cos(t - \varphi) = -1 \Leftrightarrow t - \varphi = \pi \Leftrightarrow \varphi = t - \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(t - \pi) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin(t - \pi) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cos t = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ -\sin t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin t = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ y_0 = -\dfrac{4\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}; -\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$$

Vậy a. $x_0 + y_0$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{10}$ khi $M\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}; \dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

b. $x_0 + y_0$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\sqrt{10}$ khi $M\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5}; -\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

Bài 3 Cho (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Tìm điểm M $\in$ (E) thỏa mãn:

a. Bán kính qua tiêu này bằng hai lần bán kính qua tiêu kia ứng với M$\in$(E).

b. M nhìn đoạn nối 2 tiêu điểm dưới góc 60^0.

c. M nhìn đoạn nối 2 tiêu điểm dưới góc 90^0.

Giải

Ta có: $M(x_0+y_0)\in(E)\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{5}=1$ (1) với $\begin{cases}-3\le x_0\le 3\\ -\sqrt5\le y_0\le\sqrt5\end{cases}$

Và có: $\begin{cases}a^2=9\\ b^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ c^2=a^2-b^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ c=2\end{cases}$

$\Rightarrow F_1(-2;0)$; $F_2(2;0)$ là các tiêu điểm của (E)

$$\Rightarrow\begin{cases}F_1M=a+\frac{c}{a}x_0=3+\frac{2}{3}x_0\\ F_2M=a-\frac{c}{a}x_0=3-\frac{2}{3}x_0\end{cases}$$

a. Theo đề bài ta có : $\left[\begin{array}{l}F_1M=2F_2M\\ 2F_1M=F_2M\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3+\frac{2}{3}x_0=2(3-\frac{2}{3}x_0)\\ 2(3+\frac{2}{3}x_0)=3-\frac{2}{3}x_0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\frac{3}{2}\\ x_0=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

*Với $x_0=\pm\frac{3}{2}$, từ (1) $\Rightarrow\frac{\frac{9}{4}}{9}+\frac{y_0^2}{5}=1\Rightarrow y_0^2=\frac{15}{4}\Rightarrow y_0=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\text{ hoặc }M\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\text{ hoặc }M\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\text{ hoặc }M\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

b. $M(x_0;y_0)\in(E)\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{5}=1$

Xét ΔMF_1F_2 ta có:

$F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2\,MF_1\,MF_2\cos60^0$

$\Rightarrow(2c)^2=MF_1^2+MF_2^2-MF_1\,MF_2$

$\Rightarrow 16=(MF_1+MF_2)^2-3\,MF_1\,MF_2$ với $\begin{cases}MF_1=3+\frac{2}{3}x_0\\ MF_2=3-\frac{2}{3}x_0\end{cases}$

$\Rightarrow 16=(2a)^2-3\,MF_1\,MF_2$

$$\Leftrightarrow 16 = 6^2 - 3\left(9 - \frac{4}{9}x_0^2\right) \quad \Leftrightarrow 21 - 4x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow y_0^2 = \left(1 - \frac{x_0^2}{9}\right)5 = \left(1 - \frac{21}{36}\right)5 = \frac{75}{36}$

$$\Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{\sqrt{75}}{6} = \pm\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Khi đó: $M\left(-\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{\sqrt{75}}{6}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{21}}{2}; -\frac{\sqrt{75}}{6}\right)$

hoặc: $M\left(\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{\sqrt{75}}{6}\right)$ hoặc $M\left(\frac{\sqrt{21}}{2}; -\frac{\sqrt{75}}{6}\right)$

c. $M(x_o; y_o) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{5} = 1$

Cách 1: Từ yêu cầu bài toán $\Rightarrow \Delta MF_1F_2$ vuông tại M

$$\Rightarrow F_1F_2^2 = (MF_1)^2 + (MF_2)^2 \Rightarrow F_1F_2^2 = (MF_1 + MF_2)^2 - 2\,MF_1\,MF_2$$

$$\Rightarrow 4^2 = 6^2 - 2\left(9 - \frac{4}{9}x_0^2\right) \quad \Rightarrow \frac{81 - 4x_0^2}{9} = 10$$

$\Rightarrow 81 - 4x_0^2 = 90 \quad \Rightarrow 4x_0^2 = -9$ phương trình vô nghiệm

Vậy không tồn tại M thỏa mãn bài toán.

Cách 2: M nhìn đoạn F_1F_2 dưới góc vuông

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn tâm O(0; 0) đường kính F_1F_2; phương trình của (C): $x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn (C); $M \in (E)$

$\Rightarrow$ Toạ độ M là nghiệm của hệ:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{5} \\ x_0^2 + y_0^2 = 4 \end{cases}$$ (hệ vô nghiệm)

$\Rightarrow$ Không tồn tại M thỏa mãn bài toán

Bài 4. Cho (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$

Tiêu điểm $F_1(-c; 0)$. Tìm $M \in (E)$ thỏa mãn:

a. Đoạn F_1M ngắn nhất.

b. Đoạn F_1M dài nhất.

Giải

$$M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Ta có: $F_1M = a + \frac{c}{a}x_0$

$\Rightarrow F_1M = a + e\,x_0$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} -a \le x_0 \le a \quad (1) \\ 0 < e < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -ae \le ex_0 \le ae \Leftrightarrow -ae + a \le ex_0 + a \le ae + a$

$\Leftrightarrow c - a \le F_1M \le c + a$

* $F_1M = c + a \Rightarrow x_0 = a \quad \Rightarrow M(a;\, 0)$

$\Rightarrow$ F_1M có độ dài lớn nhất bằng $c + a$ khi $M(a;\, 0)$

Vậy đoạn F_1M dài nhất khi $M(a;\, 0)$

* $F_1M = -a + c$ khi $x_0 = -a \quad \Rightarrow M(-a;\, 0)$

$\Rightarrow$ F_1M có độ dài nhỏ nhất bằng $-a + c$ khi $M(-a;\, 0)$

Vậy đoạn F_1M ngắn nhất khi $M(-a;\, 0)$

Kết luận: a) Đoạn F_1M ngắn nhất khi $M(-a;\, 0)$

b) Đoạn F_1M dài nhất khi $M(\,a;\, 0)$

Bài 5. (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Tìm tọa độ $M \in (E)$ sao cho tiếp tuyến của (E) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Giải

Cách 1: $M(x_0\,;y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad (*)$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (E) tại M là: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$

Gọi $\begin{cases} A = (\Delta) \cap Oy \\ B = (\Delta) \cap Ox \end{cases}$

Để tồn tại ΔOAB cần điều kiện $x_0\,y_0 \neq 0$

$\Rightarrow A\left(0;\frac{b^2}{y_0}\right); \qquad B\left(\frac{a^2}{x_0};0\right)$

Ta có diện tích ΔOAB là:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}|y_A|.|x_B| = \frac{1}{2}\left|\frac{b^2}{y_0}\right|.\left|\frac{a^2}{x_0}\right|$$

$$= \frac{1}{2}ab.\left|\frac{b}{y_0}\right|.\left|\frac{a}{x_0}\right| = \frac{1}{2}ab.\frac{1}{\left|\frac{y_0}{b}\right|.\left|\frac{x_0}{a}\right|} \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left|\frac{x_0}{a}\right|.\left|\frac{y_0}{b}\right| = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}.\frac{y_0^2}{b^2}} \le \frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left|\frac{x_0}{a}\right|.\left|\frac{y_0}{b}\right|} \ge 2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $S \ge ab$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2}$

Vậy diện tích ΔOAB nhỏ nhất là: $S_{min} = ab$ khi và chỉ khi $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2}$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{2x_0^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$

và $\frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow y_0 = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn bài toán:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{b}{\sqrt{2}}\right);\quad \left(-\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{b}{\sqrt{2}}\right);\quad \left(-\frac{a}{\sqrt{2}};-\frac{b}{\sqrt{2}}\right);\quad \left(\frac{a}{\sqrt{2}};-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

Cách 2: $M(x_0;y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} = 1$

Đặt $\begin{cases} \frac{x_0}{a} = \sin\alpha \\ \frac{y_0}{b} = \cos\alpha \end{cases} \qquad \forall\alpha \in [0; 2\pi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = a\sin\alpha \\ y_0 = b\cos\alpha \end{cases} \qquad \Rightarrow M(a\sin\alpha; b\cos\alpha)$$

Phương trình tiếp tuyến của (E) tại M_0 là: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2} = 1 \qquad (\Delta)$

Gọi $A = (\Delta)\cap Ox$; $\quad B = (\Delta)\cap Oy$ điều kiện $x_0y_0 \ne 0$

$$\Rightarrow A\left(\frac{a^2}{x_0}; 0\right); \qquad B\left(0; \frac{b^2}{y_0}\right)$$

hay $\quad A\left(\frac{a}{\sin\alpha}; 0\right); \quad B\left(0; \frac{b}{\cos\alpha}\right)$

Ta có diện tích ΔOAB là:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left|\frac{a}{\sin\alpha}\right|.\left|\frac{b}{\cos\alpha}\right|$$

$$= \frac{1}{2}ab.\frac{1}{|\sin\alpha|.|\cos\alpha|} = \frac{ab}{|\sin 2\alpha|}$$

Ta có: $0 < |\sin 2\alpha| \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|\sin 2\alpha|} \ge 1 \Rightarrow S = \dfrac{ab}{|\sin 2\alpha|} \ge ab$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow |\sin 2\alpha| = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \pm 1$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$$

Vậy diện tích $\triangle OAB$ nhỏ nhất bằng ab

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$$

$\Leftrightarrow$ M là một trong các điểm sau:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{a}{\sqrt{2}}; -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy cho (E): $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

a. $\forall N \in (E)$ chứng minh rằng $b \le ON \le a$

b. Tìm hai điểm A; B thuộc (E) thỏa mãn $OA \perp OB$ và $S_{\Delta OAB}$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Giải

a. $N(x_N; y_N) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x_N^2}{a^2} + \dfrac{y_N^2}{b^2} = 1$

Ta có $a > b > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{b^2} \Rightarrow \dfrac{y_N^2}{a^2} \le \dfrac{y_N^2}{b^2}$ (vì $y_N^2 \ge 0$ dấu "=" xảy ra khi $y_N = 0$)

Ta có: $ON^2 = x_N^2 + y_N^2 = a^2\left(\dfrac{x_N^2}{a^2} + \dfrac{y_N^2}{a^2}\right) \le a^2\left(\dfrac{x_N^2}{a^2} + \dfrac{y_N^2}{b^2}\right) = a^2$

Vậy: $ON^2 \le a^2$ (1)

*Ta có: $ON^2 = x_N^2 + y_N^2 = b^2\left(\dfrac{x_N^2}{b^2} + \dfrac{y_N^2}{b^2}\right) \le b^2\left(\dfrac{x_N^2}{a^2} + \dfrac{y_N^2}{b^2}\right) = b^2$

Vậy $ON^2 \ge b^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b^2 \le ON^2 \le a^2$

hay $b \le ON \le a$ (điều phải chứng minh)

b. Ta có $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B) \in (E)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A^2}{a^2} + \dfrac{y_A^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_B^2}{a^2} + \dfrac{y_B^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Đặt $$\begin{cases} \dfrac{x_A}{a} = \sin\alpha; \ \dfrac{y_A}{b} = \cos\alpha \ ; \quad \forall\alpha \in [0;2\pi) \\ \dfrac{x_B}{a} = \sin\beta; \ \dfrac{y_B}{b} = \cos\beta \ ; \quad \forall\beta \in [0;\ 2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = a\sin\alpha; \ y_A = b\cos\alpha \ ; \quad \forall\alpha \in [0;\ 2\pi) \\ x_B = a\sin\beta \ ; \ y_A = b\cos\beta \ ; \quad \forall\beta \in [0;\ 2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(a\sin\alpha;\ b\cos\alpha)\ ; \quad B(a\sin\beta;\ b\cos\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{OA} = (a\sin\alpha; b\cos\alpha) \\ \overline{OB} = (b\sin\beta; b\cos\beta) \end{cases}$$

Ta có: $OA \perp OB$

$$\Rightarrow \overline{OA}.\overline{OB} = a^2\sin\alpha\sin\beta + b^2\cos\alpha\cos\beta = 0 \qquad (I)$$

$$S = S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.\,OB$$

$$S^2 = \frac{1}{4}OA^2.OB^2 = \frac{1}{4}(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)(a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta)$$

$$= \frac{1}{4}\left[a^4\sin^2\alpha\sin^2\beta + b^4\cos^2\alpha\cos^2\beta + a^2b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + a^2b^2\sin^2\beta\cos^2\alpha\right](3)$$

Từ I

$$\Rightarrow (a^2\sin\alpha\sin\beta + b^2\cos\alpha\cos\beta)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^4\sin^2\alpha\sin^2\beta + b^4\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2a^2b^2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow a^4\sin^2\alpha\sin^2\beta + b^4\cos^2\alpha\cos^2\beta = -2a^2b^2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2)\left[\sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta\right]$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2\left[\sin(\alpha-\beta)\right]^2 \le \frac{1}{4}a^2b^2$$

$$\Rightarrow S \le \frac{1}{2ab} \qquad (*)$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \sin(\alpha - \beta) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0 \qquad (II) \qquad \Leftrightarrow -\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta \qquad (5)$$

Thay (5) vào (I) ta được:

$$a^2\sin\alpha\sin\beta - b^2\sin\alpha\sin\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)\sin\alpha\sin\beta = 0$$

$\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta = 0$ (vì $a^2 - b^2 \neq 0$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \sin\beta = 0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \alpha \in [0;2\pi) \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0;\pi$

*Với $\alpha = 0$, từ (II) $\Rightarrow \cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

Khi đó: $\begin{cases} A(0;\, b) \\ B(a;\, 0) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A(0;b) \\ B(-a;\, 0) \end{cases}$

* Với $\alpha = \pi$, từ (II) $\Rightarrow \cos(\pi - \beta) = 0 \Rightarrow -\cos\beta = 0 \Rightarrow \cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

Khi đó: $\begin{cases} A(0;-b) \\ B(a;\, 0) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A(0;b) \\ B(-a;\, 0) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A(0;-b) \\ B(a;\, 0) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A(0;\,-b) \\ B(-a;\, 0) \end{cases}$

Trường hợp 2: $\sin\beta = 0$ (bạn đọc giải tương tự như trường hợp 1).

Bài 7. Cho A(3;0). Tìm B; C $\in$ (E) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$; B, C đối xứng qua Ox thỏa mãn ΔABC đều.

Giải

B; C $\in$ (E) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

Ta có: ΔABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ BC = AC \end{cases}$

Không mất tính tổng quát giả sử $B(x_0;y_0)$; $y_0 \geq 0$. Do A; B; C không thẳng hàng $\Rightarrow y_0 > 0$

Do B và C đối xứng qua Ox nên ta có: $C(x_0;\, -y_0)$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1;\ C(x_0;-y_0) \\ d(A, BC) = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ (*) .

Mặt khác, ta có phương trình đường thẳng BC là $x = x_0$ và

$BC = \sqrt{(-2y_0)^2} = |2y_0| = 2y_0$ vì $y_0 > 0$

Từ (*) $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{9} + \dfrac{y_0^2}{3} = 1 \\ |3 - x_0| = y_0\sqrt{3} \quad \text{với} \quad -3 \le x_0 < 3 \quad \text{(vì B không trùng A)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y_0^2}{3} + \dfrac{x_0^2}{9} = 1 & (1) \\ 3 - x_0 = y_0\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x_0 = 3 - y_0\sqrt{3}$ (3) với

Thay (3) vào (1) ta được:

$$\frac{y_0^2}{3} + \frac{(3 - y_0\sqrt{3})^2}{9} = 1 \quad \Leftrightarrow \frac{y_0^2}{3} + \frac{(\sqrt{3} - y_0)^2}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 - 2y_0\sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \quad \text{(loại)} \\ y_0 = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

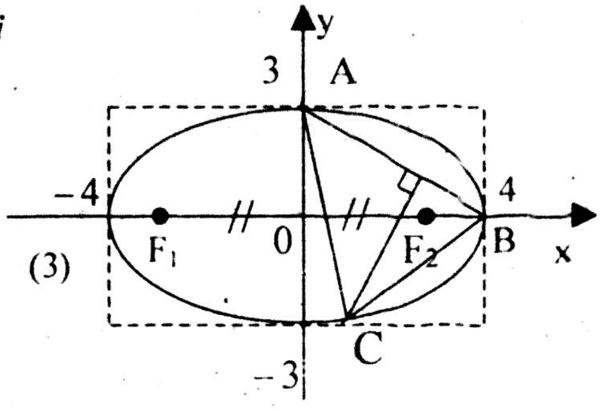
Khi đó, từ (3) $\Rightarrow x_0 = 0 \quad \Rightarrow B(0; \sqrt{3}) \quad \Rightarrow C(0; -\sqrt{3})$

Bài 8. Cho (E) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và (d): $3x + 4y - 12 = 0$

1. Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm A; B. Tính độ dài đoạn AB.

2. Tìm C $\in$ (E) sao cho:
   a. Δ ABC có diện tích bằng 6.
   b. Δ ABC có diện tích lớn nhất.
   c. Δ ABC cân ở A hoặc B.
   d. Δ ABC vuông.

Giải



1. Xét hệ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 & (1) \\ 3x + 4y - 12 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + 3 \Rightarrow y = 3(1 - \dfrac{1}{4}x)$ (3)

Thay (3) vào (1), ta có:

$$\frac{x^2}{16} + (1 - \frac{1}{4}x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{2x}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (y = 3) \\ x = 4 & (y = 0) \end{array}\right.$$

Vậy (d) cắt (E) tại hai điểm (0; 3); (4; 0)

Không mất tính tổng quát giả sử A(0; 3); B(4; 0)

Khi đó $AB = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

2. (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$C(x_0 ; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \qquad (*)$$

a. Cách 1:

$$\text{Đặt} \begin{cases} \frac{x_0}{4} = \sin t \\ \frac{y_0}{3} = \cos t \end{cases} \quad (\forall t \in [0; 2\pi)) \quad \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4\sin t \\ y_0 = 3\cos t \end{cases}$$

Ta có diện tích ΔABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.d(C, AB)$

$S_{\Delta ABC} = 6$ (gt)

Mặt khác, ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} AB\, d(C, AB) = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.5\frac{|12\sin t + 12\cos t - 12|}{\sqrt{25}} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.5\frac{|12\sin t + 12\cos t - 12|}{5} = 6 \qquad \Leftrightarrow |\sin t + \cos t - 1| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left|1 - \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}) = 1 \\ 1 - \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(t - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos(t - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \text{ (ptvn)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ t - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \end{array}\right. \qquad (\text{vì } t \in [0; 2\pi))$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3\pi}{4} \\ t = \frac{7\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$*\text{Với } t = \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_0.+ = 4\sin(\frac{3\pi}{4}) = 2\sqrt{2} \\ y_0 = 3\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow C(2\sqrt{2} ; -\frac{3\sqrt{2}}{2})$$

*Với $t=\dfrac{7\pi}{4}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4\sin(\dfrac{7\pi}{4}) = -2\sqrt{2} \\ y_0 = 3\cos(\dfrac{7\pi}{4}) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow C(-2\sqrt{2};\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2})$

Cách 2:

$$S_{\Delta ABC} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.5\frac{|3x_0+4y_0-12|}{5} = 6$$

$$\Leftrightarrow |3x_0+4y_0-12| = 12 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 3x_0+4y_0-24=0 \\ 3x_0+4y_0=0 \end{matrix}\right.$$

Kết hợp với (*) ta có :

$$\left[\begin{matrix} \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{9}=1 \\ 3x_0+4y_0=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{9}=1 \\ 3x_0+4y_0-24=0 \end{cases} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \begin{cases} x_0^2 = 8 \\ y_0 = -\dfrac{3}{4}x_0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{16}+(2-\dfrac{x_0}{4})^2 = 1 \\ y_0 = 6-\dfrac{3}{4}x_0 = 3(2-\dfrac{1}{4}x_0) \end{cases} \end{matrix}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \begin{cases} x_0 = 2\sqrt{2} \quad \text{hoặc} \quad x_0 = -2\sqrt{2} \\ y_0 = -\dfrac{3}{4}x_0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0^2 - 8y_0 + 24 = 0 \\ y_0 = 6-\dfrac{3}{4}x_0 \end{cases} \text{hệ vô nghiệm} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \begin{cases} x_0 = 2\sqrt{2} \\ y_0 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = -2\sqrt{2} \\ y_0 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow C\left(2\sqrt{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{hoặc} \quad C\left(-2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

b. ***Cách 1***: C(4sint; 3cost)

Khi đó:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C,AB) = \frac{1}{2}.5\frac{|12\sin t + 12\cos t - 12|}{5} = 6\left|1-\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})\right|$$

Ta có: $\cos\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) \ge -1 \Rightarrow -\sqrt{2}\cos\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \le 1+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left|1-\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} \le 6(1+\sqrt{2})$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \cos\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow t-\frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4\sin\dfrac{5\pi}{4} = -2\sqrt{2} \\ y_0 = 3\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C\left(-2\sqrt{2}\,; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Cách 2:

Ta có diện tích ΔABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C;\, AB) = \frac{1}{2}.5\frac{|3x_0+4y_0-12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{1}{2}|3x_0+4y_0-12|$$

$$= \frac{1}{2}|12-(3x_0+4y_0)|$$

$$= \frac{1}{2}|12+(-3x_0-4y_0)| \le \frac{1}{2}\left[12+|-3x_0-4y_0|\right] \quad (5)$$

Mà $|-3x_0-4y_0| = \left|-12\dfrac{x_0}{4}-12\dfrac{y_0}{3}\right| \le \sqrt{(12^2+12^2)(\dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{9})} = 12\sqrt{2}$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow S_{\Delta ABC} \le 6\left(1+\sqrt{2}\right)$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 < 0; y < 0 \\ \dfrac{x_0}{4} = \dfrac{y_0}{3} \end{cases}$$

Kết hợp với (*) ta có:

$$2\frac{x_0^2}{16} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0 = 2\sqrt{2} & \text{(loại)} \\ x_0 = -2\sqrt{2} & \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2\sqrt{2} \\ y_0 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow C(-2\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2})$$

c. ΔABC cân ở A hoặc B $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = AC \\ AB = BC \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 25 = x_0^2+(y_0-3)^2 \\ 25 = (x_0-4)^2+y_0^2 \end{array}\right.$

với $\begin{cases} -4 \le x_0 < 4 \\ -3 \le y_0 < 3 \end{cases}$

TH1: $25 = x_0^2 + (y_0 - 3)^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 25 - (y_0 - 3)^2$ **(4)**

Thay (4) vào phương trình $\dfrac{x_0^2}{16} + \dfrac{y_0^2}{9} = 1$ **(*)**, ta có:

$$\frac{25 - (y_0 - 3)^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 7y_0^2 + 54y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_0 = -\dfrac{54}{7} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Khi $y_0 = 0$; ta có $x_0^2 = 16$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 4 \quad \text{(loại)} \\ x_0 = -4 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-4;0)$$

TH2: $25 = (x_0 - 4)^2 + y_0^2 \Leftrightarrow y_0^2 = 25 - (x_0 - 4)^2$ (5)

Thay (5) vào (*) ta có:

$$\frac{x_0^2}{16} + \frac{25 - (x_0 - 4)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow -7x_0^2 + 128x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \dfrac{128}{7} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $x_0 = 0$; $\Rightarrow y_0^2 = 9$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 3 \quad \text{(loại)} \\ y_0 = -3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3 \end{cases} \Rightarrow C(0;-3)$$

Bạn đọc có thể giải tương tự khi ΔABC cân với chú ý:

$$\Delta ABC \text{ cân} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = AC \\ BC = BA \\ BC = CA \end{array}\right.$$

$$\Delta ABC \text{ vuông} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB \perp AC \\ BC \perp BA \\ BC \perp CA \end{array}\right.$$

d. Trường hợp 1: ΔABC vuông ở A ⇔ AB ⊥ AC

Khi đó đường thẳng AC qua A(0;3) và AC ⊥ AB ≡ (d): 3x + 4y −12 = 0 nên phương trình đường thẳng AC là:

$$4(x-0)-3(y-3)=0 \Leftrightarrow 4x-3y+9=0$$

Ta có $C(x_0;y_0)$ là giao điểm của đường thẳng AC và elip (E) nên ta có hệ:

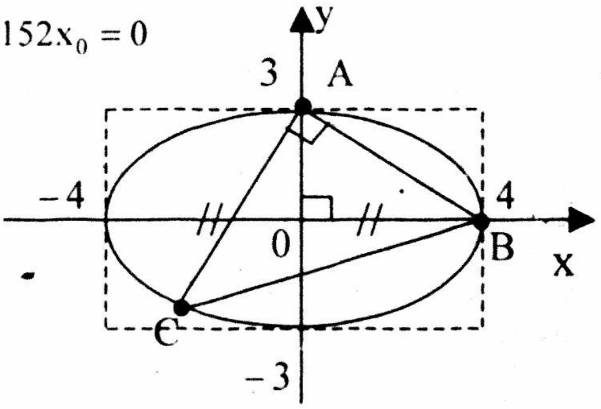
$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{9}=1 \quad (*) \\ 4x_0-3y_0+9=0 \quad (8) \end{cases} \text{ với } \begin{cases} -4 \le x_0 < 4 \\ -3 \le y_0 < 3 \end{cases}$$

Ta có (8) $\Leftrightarrow y_0=\dfrac{4}{3}x_0+3 \quad (9)$

Thay (9) vào (*) ta được:

$$\frac{x_0^2}{16}+\frac{\left(\frac{4}{3}x_0+3\right)^2}{9}=1 \Leftrightarrow 337x_0^2+1152x_0=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\dfrac{1152}{337} \in [-4;4) \end{array}\right.$$



* Với $x_0=0$; từ (9) $\Rightarrow y_0=3$ (loại)

* Với $x_0=-\dfrac{1152}{337} \Rightarrow y_0=-\dfrac{525}{337}$

$$\Rightarrow C\left(-\frac{1152}{337};-\frac{525}{337}\right)$$

Trường hợp 2: ΔABC vuông ở B(4;0) ⇔ AB ⊥ BC

Phương trình đường thẳng BC là: $4(x-4)-3y=0 \Leftrightarrow 4x-3y-16=0$

Ta có $C(x_0;y_0)$ là giao điểm của đường thẳng BC và elip (E) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{9}=1 \quad (*) \\ 4x_0-3y_0-16=0 \quad (10) \end{cases} \text{ với } \begin{cases} -4 \le x_0 < 4 \\ -3 \le y_0 < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 337x_0^2-2048x_0+2800=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_0=4 \\ x_0=\dfrac{700}{337} \end{array}\right.$$

Khi đó với $x = \frac{700}{337}$ từ (10)

$$\Rightarrow y_0 = \frac{4}{3}x_0 - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{700}{337} - \frac{16}{3} = -\frac{864}{337} \Rightarrow C\left(\frac{700}{337}; -\frac{864}{337}\right)$$

Trường hợp 3: ΔABC vuông ở C

Ta có $C(x_0;y_0)$ thuộc đường tròn (C) đường kính AB

Đường tròn (C) có tâm $I\left(2;\frac{3}{2}\right)$ và bán bính $R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C) là: $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \quad \text{(Hệ vô nghiệm)}$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại C thuộc (E) để ΔABC vuông ở C.

II. Dạng 2: Tìm quỹ tích của điểm I

***Phương pháp:**

+ **Phương pháp 1:** $IO_1 + IO_2 = 2a > O_1O_2$ $(O_1 \neq O_2;\ O_1; O_2$ cố định)

$\Rightarrow$ Quỹ tích của I là elíp, hai tiêu điểm O_1, O_2 và độ dài trục lớn là 2a

+ **Phương pháp 2:** $IO_1 = a > 0$ (O_1 cố định)

$\Rightarrow$ Quỹ tích của I là đường tròn tâm O_1; bán kính R = a

Bài 9. Cho $C_1(O_1;R_1)$ và đường tròn (C_2) bán kính R_2, đường tròn (C_2) chứa trong đường tròn (C_1). Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C) bán kính R (R thay đổi) tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2)

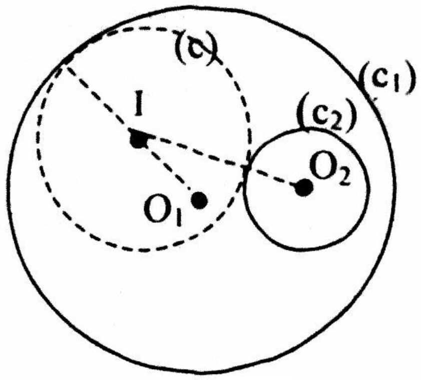
**** Chú ý***: (C_1) có tâm O_1; bán kính R_1.

(C_2) có tâm O_2 ; bán kính R_2.

(C) có tâm I, bán kính R.

(C) tiếp xúc ngoài với (C_2) $\Leftrightarrow IO_2 = R + R_2$

(C) tiếp xúc ngoài với (C_1) $\Leftrightarrow IO_1 = R + R_1$



Giải

Gọi O_2 là tâm của (C_2)

Theo đề ra ta có:

$$\begin{cases} IO_2 = R_2 + R \\ IO_1 = R_1 - R \end{cases}$$

$$\Rightarrow IO_1 + IO_2 = R_1 + R_2 \qquad (1)$$

Trường hợp 1: O_1 không trùng O_2. Từ (1) $\Rightarrow$ Quỹ tích tâm I của (C) là O_1; O_2

Trường hợp 2: O_1 trùng O_2. Từ (1) ta có:

$$2O_1I = R_1 + R_2 \Rightarrow O_1I = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$\Rightarrow$ Quỹ tích tâm I của (C) thỏa mãn bài toán là đường tròn tâm O_1; bán kính bằng $\frac{R_1 + R_2}{2}$.

Bài 10. Cho đường tròn (C_1) tâm $I_1(-1;\ 0)$; bán kính $R_1 = 4$ và đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;\ 0)$, bán kính $R_2 = 2$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C) tiếp xúc với (C_1), (C_2).

Giải

Ta có: $\overrightarrow{I_1I_2} = (2;0)$

$$\Rightarrow I_1I_2 = 2 = |R_2 - R_1| = R_1 - R_2$$

$$\Rightarrow (C_1);(C_2) \text{ tiếp xúc trong tại K}$$

Ta có : $\overrightarrow{KI_1} = \frac{4}{2}\overrightarrow{KI_2}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{KI_1} = 2\overrightarrow{KI_2}$$

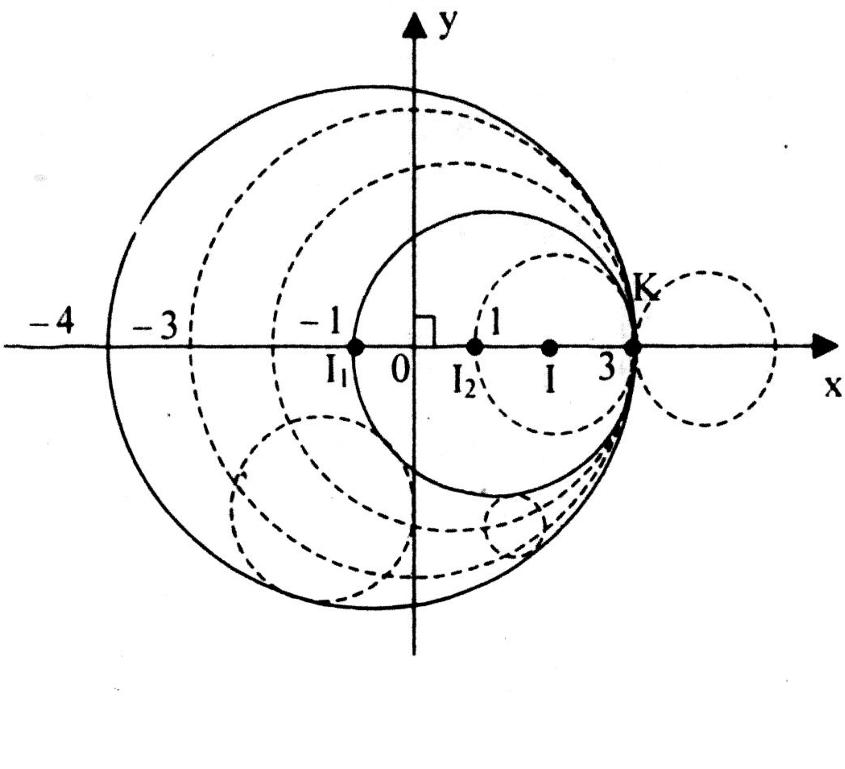
$$\Rightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{x_{I_1} - 2x_{I_2}}{1-2} = \dfrac{-1-2}{-1} = 3 \\ y_K = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow K(3;\ 0)$$

+ **Trường hợp 1:** (C) tiếp xúc với (C_1); (C_2) tại K(3; 0)

$\Rightarrow$ I, I_1, I_2, K thẳng hàng

$\Rightarrow$ $I \in Ox$ $\quad (I \neq K)$

Vậy quỹ tích I là trục hoành từ K(3; 0)



+ Trường hợp 2: (C) tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2) (vì (C_2) ở bên trong (C_1).

$$\Rightarrow \begin{cases} II_1 = R_1 - R & \text{(R là bán kính của (C))} \\ II_2 = R_2 + R & \text{(R là bán kính của (C))} \end{cases}$$

$$\Rightarrow II_1 + II_2 = R_1 + R_2 > I_1I_2$$

Vậy $II_1 + II_2 = R_1 + R_2 > I_1I_2$ (I_1 không trùng I_2; I_1; I_2 cố định)

nên quỹ tích tâm I của (C) là đường elip (E) có hai tiêu điểm I_1; I_2 (trừ K(3;0))

Phương trình elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Ta có $II_1 + II_2 = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$I_1(-1; 0)$; $I_2(1; 0)$ là các tiêu điểm của (E) $\Rightarrow c = 1$

Do đó $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$

$\Rightarrow$ Phương trình của elip (E) là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

III. Dạng 3: Tiếp tuyến của elip (E) (phương trình và tính chất)

Bài 11. Cho (E) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$ và các bán kính qua tiêu ứng với $M \in (E)$ lần lượt là 9; 15. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M

Giải

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 144 \\ b^2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ c = 8 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của $M(x_0 ; y_0) \in (E)$ là: $\frac{x_0.x}{144} + \frac{y_0.y}{80} = 1$

Tìm $x_0 ; y_0$:

Ta có: $M(x_0 ; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{144} + \frac{y_0^2}{80} = 1$ (1)

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} MF_1 = 9 \\ MF_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{c}{a}x_0 = 9 \\ a - \frac{c}{a}x_0 = 15 \end{cases}$$

Do đó ta có: $2\frac{c}{a}x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{3.a}{c}$ mà $\begin{cases} a = 12 \\ c = 8 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_0 = (-3) \cdot \frac{12}{8} = -\frac{9}{2}$$

(1) ⇒ $y_0^2 = \frac{25.11}{4}$ ⇒ $y_0 = \pm\frac{5}{2}\sqrt{11}$

+ Với $\begin{cases} x_0 = -\frac{9}{2} \\ y_0 = \frac{5\sqrt{11}}{2} \end{cases}$ ⇒ phương trình tiếp tuyến tại M_0 là: $-\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{144} + \frac{5\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{y}{80} = 1$

+ Với $\begin{cases} x_0 = -\frac{9}{2} \\ y_0 = -\frac{5\sqrt{11}}{2} \end{cases}$ ⇒ phương trình tiếp tuyến tại M_0 là: $-\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{144} - \frac{5\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{y}{80} = 1$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} MF_1 = 15 \\ MF_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{c}{a}x_0 = 15 \\ a - \frac{c}{a}x_0 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3cx_0}{a} = 6 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3a}{c} = \frac{9}{2} \Rightarrow y_0^2 = \frac{25.11}{4} \quad \text{(do (1))}$$

$$\Rightarrow y_0 = \pm\frac{5\sqrt{11}}{2}$$

⇒ Hai tiếp tuyến của (E) là: $\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{144} + \frac{5\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{y}{80} = 1$; $\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{144} - \frac{5\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{y}{80} = 1$

Bài 12. Cho (E) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$ $(a > b > 0)$. Tiếp tuyến bất kì của (E) cắt hai đường thẳng $x = \pm a$ tại M; N. Chứng minh rằng hai tiêu điểm của (E) nhìn đoạn MN dưới một góc vuông.

Giải

Không mất tính tổng quát giả sử ta có

$N \in (\Delta_1)$: $x = -a$; $M \in (\Delta_2)$: $x = a$

Ta có: $N \in (\Delta_1)$: $x = -a$ $\Leftrightarrow N(-a; y_N)$

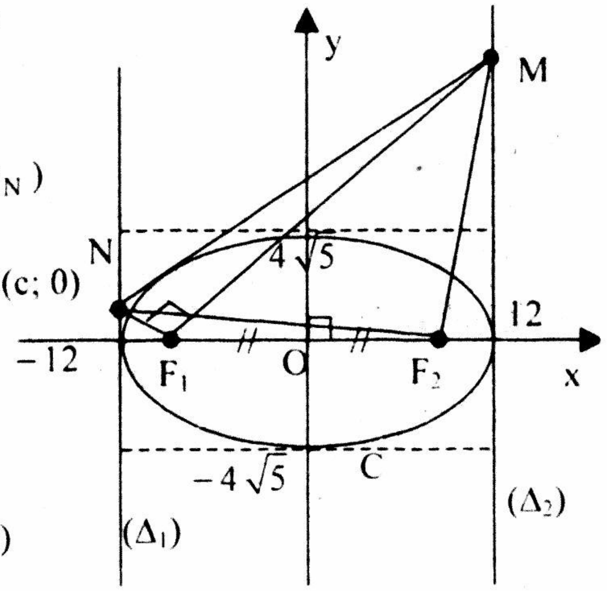
$M \in (\Delta_2)$: $x = a$ $\Leftrightarrow M(a; y_M)$

Hai tiêu điểm của (E) là: $F1(-c; 0)$; $F2(c; 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_1M} = (a + c; y_M) \\ \overrightarrow{F_1N} = (-a + c; y_N) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1N} = (c^2 - a^2) + y_M.y_N$$

$$= -b^2 + y_M.y_N \qquad (*)$$



Tiếp tuyến (Δ) bất kì của (E) cắt (Δ_1); (Δ_2) nên (Δ) không song song Oy

⇒ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (E) có dạng: $y = Ax + D$

Ta có: M; N $\in$ (Δ) $\Rightarrow \begin{cases} y_M = aA + D \\ y_N = -aA + D \end{cases}$

$\Rightarrow y_M.y_N = -a^2A^2 + D^2$. Mặt khác, ta có: $D^2 = a^2A^2 + (-1)^2b^2$ (điều kiện tiếp xúc)

$$\Rightarrow y_M.y_N = -a^2A^2 + a^2A^2 + b^2$$
$$= b^2 \qquad (1)$$

Thay (1) vào (*) ta được:

$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1N} = -b^2 + b^2 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_1M} \perp \overrightarrow{F_1N} \Rightarrow F_1M \perp F_1N$ (điều phải chứng minh)

(Bạn đọc tự chứng minh tương tự ⇒ Kết luận: $F_2M \perp F_2N$)

Bài 13. Cho (E) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Hai tiếp tuyến bất kì của (E) song song nhau. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến đó đối xứng nhau qua gốc tọa độ O(0;0).

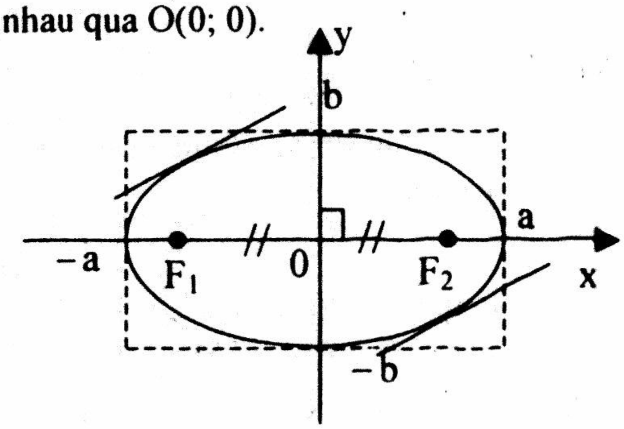
Giải

Gọi $A_1(x_1;y_1); A_2(x_2;y_2)$ thuộc (E)

Hai tiếp tuyến (Δ_1); (Δ_2) lần lượt tại A_1; A_2 của (E) song song nhau

⇒ A_1 không trùng A_2

Ta chứng minh (Δ_1); (Δ_2) đối xứng nhau qua O(0; 0).



Trường hợp 1:

+ (Δ_1); (Δ_2) cùng vuông góc với Ox hoặc cùng vuông góc với Oy

Ta có: (Δ_1); (Δ_2) đối xứng qua O

Trường hợp 2:

+ (Δ_1); (Δ_1) không vuông góc với Ox hoặc không vuông góc với Oy

$\Rightarrow x_1y_1 \cdot x_2y_2 \neq 0$

Phương trình tiếp tuyến (Δ_1): $\dfrac{x_1x}{a^2} + \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

$\Rightarrow (\Delta_1)$ có hệ số góc $k_1 = \dfrac{\dfrac{-x_1}{a^2}}{\dfrac{y_1}{b^2}} = -\dfrac{b^2}{a^2}.\dfrac{x_1}{y_1}$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ_2): $\dfrac{x_2x}{a^2} + \dfrac{y_2y}{b^2} = 1$

$\Rightarrow (\Delta_2)$ có hệ số góc $k_2 = \dfrac{\dfrac{-x_2}{a^2}}{\dfrac{y_2}{b^2}} = -\dfrac{b^2}{a^2}.\dfrac{x_2}{y_2}$

Do $(\Delta_1) // (\Delta_2)$ $\Rightarrow -\dfrac{b^2}{a^2}.\dfrac{x_1}{y_1} = -\dfrac{b^2}{a^2}.\dfrac{x_2}{y_2}$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$ $\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = m \neq 1$ (Do A_1 không trùng A_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = mx_2 \\ y_1 = my_2 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có: A_1; A_2 thuộc (E) :

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1 & (1) \\ \dfrac{x_2^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (*) và (1) $\Rightarrow \dfrac{(mx_2)^2}{a^2} + \dfrac{(my_2)^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow m^2(\dfrac{x_2^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2}) = 1$

$\Rightarrow m^2 = 1$ (do (2))

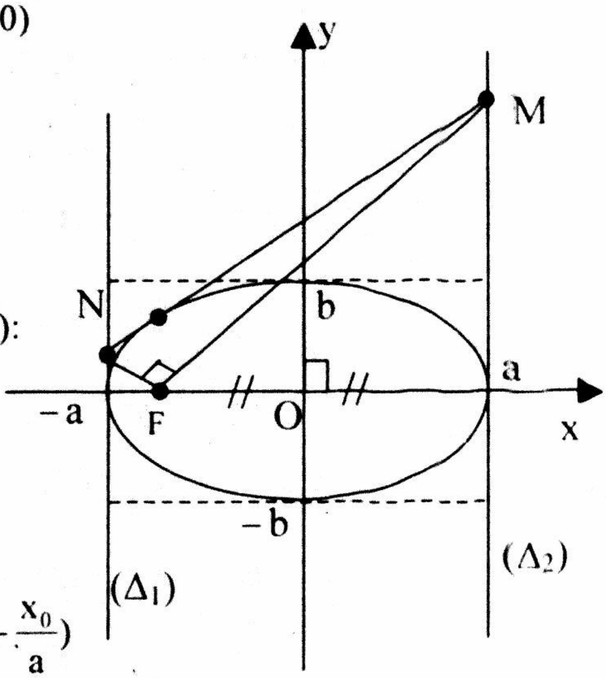
$\Rightarrow m = -1$ (vì $m \neq 1$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ y_1 = -y_2 \end{cases} \quad \Rightarrow A_1; A_2 \text{ đối xứng qua } O(0; 0)$$

$\Rightarrow (\Delta_1)$; (Δ_2) đối xứng qua O(0; 0) (đpcm)

Bài 14. Cho (E) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) cắt đường thẳng $x = a$; $x = -a$ lần lượt tại M;N sao cho ΔFMN có diện tích nhỏ nhất với F là một tiêu điểm của (E).

Giải



Không mất tính tổng quát, giả sử $F(-c, 0)$

$$A(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (E) tại

$$A(x_0; y_0) \in (E) \text{ là: } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Tiếp tuyến này cắt hai đường thẳng (Δ_1):

$x = a$ và (Δ_2): $x = -a$ $\Rightarrow y_0 \neq 0$

+ Ta có: $M = (\Delta) \cap (\Delta_2)$

$\Rightarrow$ tọa độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = a \\ \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 - \dfrac{x_0}{a}\right) \end{cases}$$

Do đó: $M\left(a; \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 - \dfrac{x_0}{a}\right)\right)$

+ Ta có: $N = (\Delta) \cap (\Delta_1)$ $\Rightarrow$ tọa độ N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -a \\ \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 + \dfrac{x_0}{a}\right) \end{cases}$$

Do đó: $N\left(-a; \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 + \dfrac{x_0}{a}\right)\right)$

Ta có: $\overrightarrow{F_1M} \perp \overrightarrow{F_1N}$ (Chứng minh ở bài 12)

$$\text{Với} \begin{cases} \overrightarrow{FM} = \left(a + c; \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 - \dfrac{x_0}{a}\right)\right) \\ \overrightarrow{FN} = \left(-a + c; \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 + \dfrac{x_0}{a}\right)\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Diện tích của Δ FMN là: $S_{\Delta FMN} = \dfrac{1}{2} FM.FN$

Vậy diện tích Δ FMN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ FM.FN nhỏ nhất

$$\text{Ta có: } FM^2 \cdot FN^2 = \left[(a + c)^2 + \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right)^2\right]\left[(c - a)^2 + \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)^2\right]$$

$$= (c^2 - a^2)^2 + (c - a)^2 \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right)^2 + (c + a)^2 \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)^2 + \frac{b^8}{y_0^4}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)^2$$

$$= (-b^2)^2 + \frac{b^8}{y_0^4}.(\frac{y_0^2}{b^2})^2 + (c-a)^2\frac{b^4}{y_0^2}(1-\frac{x_0}{a})^2 + (c+a)^2\frac{b^4}{y_0^2}(1+\frac{x_0}{a})^2$$

vì $(1-\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2})$

$$= b^4 + b^4 + (c-a)^2\frac{b^4}{y_0^2}(1-\frac{x_0}{a})^2 + (c+a)^2\frac{b^4}{y_0^2}(1+\frac{x_0}{a})^2$$

$$= 2b^4 + (c-a)^2\frac{b^4}{y_0^2}(1-\frac{x_0}{a})^2 + (c+a)^2\frac{b^4}{y_0^2}(1+\frac{x_0}{a})^2$$

$$\geq 2b^4 + 2.\sqrt{(c^2-a^2)^2(\frac{b^4}{y_0^2})^2.(1-\frac{x_0^2}{a^2})^2} = 2b^4 + 2.\sqrt{(-b^2)^2\frac{b^8}{y_0^4}(\frac{y_0^2}{b^2})^2}$$

$$= 2b^4 + 2\sqrt{b^4.b^4} = 2b^4 + 2b^4 = 4b^4$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}FM^2.FN^2 \geq b^4 \ \Rightarrow S \geq b^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$(c-a)^2\frac{b^4}{y_0^2}(1-\frac{x_0}{a})^2 = (c+a)^2\frac{b^4}{y_0^2}(1+\frac{x_0}{a})^2$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2(1-\frac{x_0}{a})^2 = (a+c)^2(1+\frac{x_0}{a})^2$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2\frac{(a-x_0)^2}{a^2} = (a+c)^2\frac{(a+x_0)^2}{a^2}$$

$\Leftrightarrow (a-c)(a-x_0) = (a+c)(a+x_0)$ (vì $a > c > 0; \ -a \leq x_0 \leq a$)

$$\Leftrightarrow a^2 - ac - ax_0 + cx_0 = a^2 + ac + ax_0 + cx_0$$

$$\Leftrightarrow 2ax_0 = -2ac \qquad \Leftrightarrow x_0 = -c$$

Khi đó $y_0^2 = b^2(1-\frac{c^2}{a^2}) = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{b^2}{a}$

$\Rightarrow S_{\Delta FMN}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng b^2 khi $\begin{cases} x_0 = -c \\ y_0 = -\frac{b^2}{a} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = -c \\ y_0 = \frac{b^2}{a} \end{cases}$

Vậy có 2 tiếp tuyến của (E) thỏa mãn bài toán với phương trình:

$$\frac{-cx}{a^2} + \frac{y}{a} = 1; \qquad \frac{-cx}{a^2} - \frac{y}{a} = 1$$

Bài 15. Lập phương trình tiếp tuyến của elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\sqrt{2}$, biết tiếp tuyến này song song đường thẳng $y = x$.

Giải

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (E) song song đường thẳng $y = x$ có dạng:

$y = x + D \quad (D \neq 0)$

$\Rightarrow x - y + D = 0$

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của (E), ta có:

$$9 \cdot 1^2 + (-1)^2 \cdot 4 = D^2$$

$$\Leftrightarrow \quad D^2 = 13 \Leftrightarrow D = \pm\sqrt{13}$$

Do đó phương trình tiếp tuyến (Δ) của (E) là: $x - y + \sqrt{13} = 0$; $x - y - \sqrt{13} = 0$

Bài 16. Lập phương trình tiếp tuyến của elip (E): $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$ kẻ từ điểm (1; 6).

Giải

Đường thẳng (Δ) qua điểm (1; 6) có phương trình:

$A(x - 1) + B(y - 6) = 0 \quad (\text{với } A^2 + B^2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow Ax + By + (-A - 6B) = 0 \; ; \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của (C), ta có: $1.A^2 + 5.B^2 = (-A - 6B)^2$

$$\Leftrightarrow 31B^2 + 12AB = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ B = -\dfrac{12}{31}A \end{array}\right.$$

+ Với $B = 0 \Rightarrow A \neq 0 \qquad (\text{vì: } A^2 + B^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (E) là:

$A(x - 1) = 0 \qquad \Rightarrow x - 1 = 0$

+ Với $B = -\frac{12}{31}A \qquad \Rightarrow A \neq 0 \qquad (\text{vì: } A^2 + B^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (E) là:

$$A(x - 1) - \frac{12}{31}A(y - 6) = 0 \quad \Rightarrow 31x - 12y + 41 = 0$$

Vậy hai tiếp tuyến kẻ từ điểm (1; 6) là:

$x - 1 = 0; \quad 31x - 12y + 41 = 0$

Chú ý: Có thể giải bài trên bằng cách 2.

* Xét (Δ) qua A(1; 6); (Δ) // Oy

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ): $x = 1$

$\Rightarrow x - 1 = 0$ thỏa mãn điều kiện $b^2A^2 + a^2B^2 = C^2$

(với $a^2 = 5$; $b^2 = 1$; $A = 1$; $B = 0$; $C = -1$)

$\Rightarrow x = 1$ là 1 tiếp tuyến của (E).

* (Δ) qua A(1; 6); (Δ) không song song Oy, phương trình (Δ) có dạng:

$y = k(x - 1) + 6 \quad \Leftrightarrow kx - y + (6 - k) = 0$

(Δ) tiếp xúc với (E) ta có: $k^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 5 = (6-k)^2$

$\Leftrightarrow 12k - 31 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{31}{12}$

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (E) là $\dfrac{31}{12}x - y + (6 - \dfrac{31}{12}) = 0$

$\Rightarrow 31x - 12y + 41 = 0$

Vậy có 2 tiếp tuyến của (E) kẻ từ điểm (1;6) là: $x - 1 = 0$; $31 - 12y + 41 = 0$

Bài 17. Cho (E_1): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ và (E2): $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

1. Viết phương trình đường tròn qua các giao điểm của (E_1), (E_2).
2. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (E_1), (E_2).

Giải

1. Ta có các giao điểm của (E_1); (E_2) thuộc đường tròn tâm O(0; 0), M(x_0 ; y_0) là giao điểm của (E_1); (E_2).

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{4} + \dfrac{y_0^2}{5} = 1 \\ \dfrac{x_0^2}{5} + \dfrac{y_0^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_0^2 + 4y_0^2 - 20 = 0 \\ 4x_0^2 + 5y_0^2 - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 = \dfrac{20}{9} \\ y_0^2 = \dfrac{20}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = \frac{40}{9}$$

$\Rightarrow$ các giao điểm của (E) thuộc đường tròn tâm O(0; 0) bán kính $R = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn qua các giao điểm của (E_1); (E_2) là:

$$x^2 + y^2 = \frac{40}{9}$$

2. Tiếp tuyến chung (Δ) của (E_1); (E_2).không song song với Oy; không song song Ox.

Phương trình tiếp tuyến chung (Δ) của (E_1); (E_2) có dạng:

$y = Ax + D \qquad (A \neq 0)$

$\Leftrightarrow Ax - y + D = 0$

(Δ) là tiếp tuyến của (E_1); (E_2)

nên ta có: $\begin{cases} 4A^2 + 5 = D^2 & (1) \\ 5A^2 + 4 = D^2 & (2) \end{cases} \Rightarrow A^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow A^2 = 1 \quad \Rightarrow A = \pm 1$

+ Với $A = \pm 1$, từ (1) $\Rightarrow D^2 = 9 \quad \Rightarrow D = \pm 3$

Vậy có bốn tiếp tuyến chung (E_1); (E_2)

$y = x + 3$; $y = x - 3$; $y = -x + 3$; $y = -x - 3$

Bài 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình tiếp tuyến chung của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ và elíp (E) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

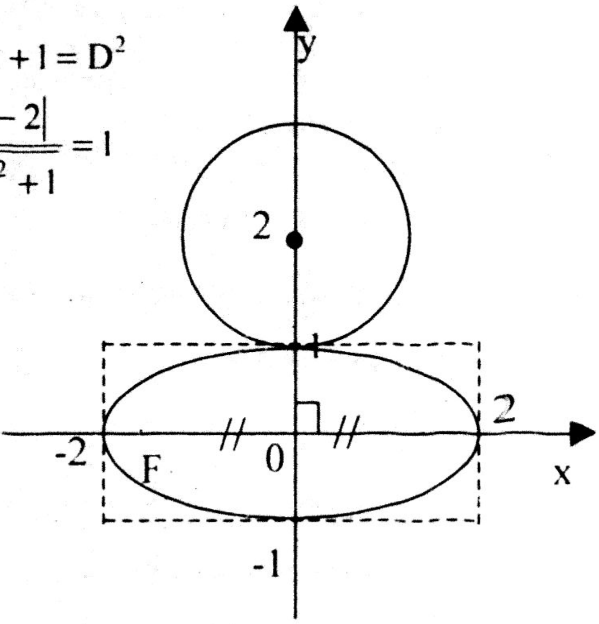
Giải.

(C) có tâm I(0;2); bán kính R = 1

Ta có: tiếp tuyến chung (D) của (C) và (E) không song song Oy

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung (D) có dạng: $y = Ax + D$

$\Rightarrow Ax - y + D = 0$



Ta có: $\begin{cases} A^2.4 + 1 = D^2 \\ d(I,(D)) = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A^2 + 1 = D^2 \\ \dfrac{|D-2|}{\sqrt{A^2+1}} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A^2 + 1 = D^2 & (1) \\ |D-2| = \sqrt{A^2+1} & (2) \end{cases}$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow (D-2)^2 = A^2 + 1$

$\Leftrightarrow 4D^2 - 16D + 16 = 4A^2 + 4$

$\Leftrightarrow 4D^2 - 16D + 16 = D^2 + 3$

(vì $4A^2 + 1 = D^2$)

$\Leftrightarrow 3D^2 - 16D + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 1 \\ D = \dfrac{13}{3} \end{array}\right.$$

+ Với D = 1, từ (1) $\Rightarrow 4A^2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung là: y = 1

+ Với $D = \frac{13}{3}$, từ (1) $\Rightarrow 4A^2 + 1 = \frac{169}{9} \quad \Rightarrow 4A^2 = \frac{169-9}{9} = \frac{160}{9}$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{40}{9} \qquad \Rightarrow A = \pm\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến chung là:

$\frac{2}{3}\sqrt{10}x - y + \frac{13}{3} = 0$; $-\frac{2}{3}\sqrt{10}x - y + \frac{13}{3} = 0$

Hay ,$2\sqrt{10}x - 3y + 13 = 0$; $2\sqrt{10}x + 3y - 13 = 0$

Vậy (C) và (E) có 3 tiếp tuyến chung là:

$y = 1$; $2\sqrt{10}x - 3y + 13 = 0$; $2\sqrt{10}x + 3y - 13 = 0$

IV. Dạng 4: Tìm tâm sai và các yếu tố của elip (E)

* ***Chú ý:*** Tâm sai của elip (E) là $e = \frac{c}{a}$

1. Nếu biết phương trình của (E), ta tìm a, c ⇒ e

2. Nếu chưa biết phương trình của (E) thì từ điều kiện đã cho, ta tìm a theo c (hoặc c theo a hoặc tìm trực tiếp tỉ số của $\frac{c}{a}$).

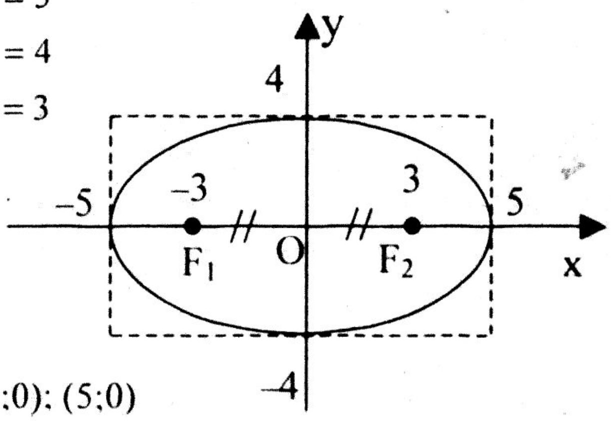
Bài 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

1. Tìm tọa độ tiêu điểm; tiêu cự; tâm sai; tọa độ các đỉnh; độ dài các trục của elip (E).
2. Vẽ elip (E).

Giải

Ta có (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$



1. Vậy elip (E) có:

+ Tiêu điểm là: $F_1(-3; 0)$; $F_2(3; 0)$
+ Tiêu cự là: $F_1F_2 = 2c = 6$
+ Tâm sai là: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$
+ Tọa độ các đỉnh là: (0;4); (0; – 4); (– 5;0); (5;0)
+ Độ dài trục lớn: 2a = 10
+ Độ dài trục bé: 2b = 8

2. Vẽ elip (E).

Bài 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy tìm tâm sai của elip (E) biết tiêu cự của (E) là trung bình cộng của độ dài trục lớn và độ dài trục bé.

Giải

Gọi 2a, 2b, 2c lần lượt là độ dài trục lớn, trục bé và tiêu cự của elip (E).

⇒ Tâm sai của (E) là: $e = \frac{c}{a}$

Theo đề ra, ta có: $\frac{2a + 2b}{2} = 2c \Leftrightarrow 2c = a + b$

⇒ $b = 2c - a$

Mặt khác, ta có: $c^2 = a^2 - b^2$

⇒ $c^2 = a^2 - (2c - a)^2$ ⇒ $c^2 = [a - (2c - a)]\,[a + (2c - a)]$

$$\Rightarrow c^2 = 4c(a - c) \;\Rightarrow c = 4(a - c) \quad (\text{vì } c > 0) \Rightarrow \; c = \frac{4}{5}a$$

Do đó tâm sai của (E) là: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\frac{4}{5}a}{a} = \dfrac{4}{5}$

Chú ý: Có thể mở rộng bài toán trên như sau:

Tìm tâm sai của elip (E) biết tổng độ dài trục lớn và độ dài trục bé bằng k lần tiêu cự (với $k > 0$; $k \neq 1$).

Hướng dẫn: Ta có $2a + 2b = k(2c)$

$\Rightarrow b = kc - a$

Mặt khác $a^2 - b^2 = c^2 \;\Rightarrow\; a^2 - (kc - a)^2 = c^2$

$\Rightarrow [\, a - (kc - a)][a + (kc - a)] = c^2 \Rightarrow (2a - kc)kc = c^2$

$\Rightarrow (2a - kc)k = c$ (vì $c > 0$) $\Rightarrow 2ka = c(1 + k^2)$

$\Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{2k}{1+k^2}$ (Ta có $0 < \dfrac{2k}{1+k^2} < 1$ trong điều kiện $k > 0$; $k \neq 1$)

Do đó tâm sai của (E) là: $e = \dfrac{2k}{1+k^2}$

Bài 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy tìm tâm sai của elip (E) biết

1. Mỗi đỉnh trên trục bé nhìn đoạn nối 2 tiêu điểm dưới góc 2α ($0 < 2\alpha < \pi$)
2. Khoảng cách giữa 2 đường chuẩn bằng 3 lần tiêu cự.
3. Khoảng cách giữa 2 đỉnh trên 2 trục bằng k lần tiêu cự ($k > \frac{1}{2}$).

Giải

Không mất tính tổng quát giả sử (E) có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

1. Mỗi đỉnh trên trục bé nhìn đoạn nối 2 tiêu điểm dưới góc 2α

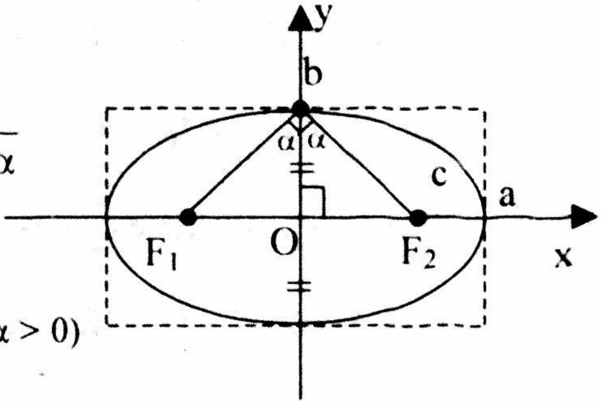
$\Rightarrow b = c.\text{cotg}\alpha$

Mà $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow a^2 = c^2(1 + \text{cotg}^2\alpha) \Rightarrow a^2 = c^2.\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{a} = |\sin\alpha| = \sin\alpha$

(vì $0 < 2\alpha < \pi \;\Rightarrow 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow 1 > \sin\alpha > 0$)



Do đó tâm sai e của (E) là: $e = \dfrac{c}{a} = \sin\alpha$

2. Ta có $2\frac{a}{e} = 3.2c$ (Hai đường chuẩn của (E) là: $x = \pm\frac{a}{e}$ và $e \in (0;1)$)

$$\Rightarrow \frac{a}{e} = 3c \Rightarrow \frac{1}{e} = 3.\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{e} = 3e$$

$$\Rightarrow 3e^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} e = \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ e = -\frac{1}{\sqrt{3}} & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy tâm sai của (E) là $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Ta có khoảng cách giữa 2 đỉnh trên hai trục là $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = k.\ 2.c \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (k.2.c)^2$$

Mà $a^2 - b^2 = c^2$

$$\Rightarrow 2a^2 = c^2(4k^2 + 1) \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{4k^2+1} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{4k^2+1}}$$

Ta có: $k > \frac{1}{2} \Rightarrow k^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow 4k^2 > 1 \Rightarrow 4k^2 + 1 > 2$

$$\Rightarrow \frac{2}{4k^2+1} < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{\frac{2}{4k^2+1}} < 1$$

Vậy tâm sai của (E) là: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{4k^2+1}}$.

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy tìm tâm sai của elip (E) biết hình vuông nội tiếp (E) có 2 cạnh qua 2 tiêu điểm và cùng vuông góc với trục chứa tiêu điểm của (E).

Giải

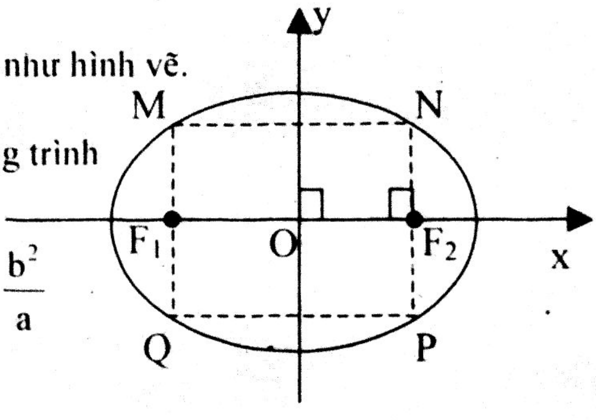
Không mất tính tổng quát giả sử (E) có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

Xét hình vuông MNPQ thỏa mãn bài toán như hình vẽ.

$\Rightarrow F_1F_2 = MN \Rightarrow 2c = MN$

Tọa độ điểm N, P là nghiệm của hệ phương trình



$$\begin{cases} x = c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = c \\ y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \pm\frac{b^2}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(c; \frac{b^2}{a}); \qquad P(c; -\frac{b^2}{a})$$

Do MN = NP $\Rightarrow\ 2c = \dfrac{2b^2}{a}\ \Rightarrow\ ac = b^2$ mà $b^2 = a^2 - c^2$

$$\Rightarrow ac = a^2 - c^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0 \Rightarrow e^2 + e - 1 = 0 \quad (0 < e < 1)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} e = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & \\ e = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & \text{(loại)} \end{array}\right. \qquad \Rightarrow e = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy tâm sai của (E) là: $e = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

V. Dạng 5: Viết phương trình elip (E).

Chú ý:

1. $M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$

   (F_1 không trùng F_2; F_1; F_2 cố định, $F_1F_2 = 2c < 2a$; $c > 0$)

2. $M \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{MF}{d(M,\Delta)} = e \ (0 < e < 1)$

   ((Δ) là đường chuẩn của (E) tương ứng tiêu điểm F; e là tâm sai)

3. Phương trình chính tắc của (E) là: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

4. Phương trình elip có 2 tiêu điểm $F_1(0; -c)$ và $F_2(0; c)$ là:

   $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) qua hai điểm $P(-4; -\sqrt{3})$; $Q(2\sqrt{2}; -3)$

Giải

Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

Do P; Q ∈ (E) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 1 \\ \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 20 \\ b^2 = 15 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của (E) là: $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{15} = 1$

Chú ý: **Xem hệ (*) có dạng** $\begin{cases}16X+3Y=1\\8X+9Y=1\end{cases}$ **(với** $\begin{cases}X=\dfrac{1}{a^2}>0\\Y=\dfrac{1}{b^2}>0\end{cases}$ **)**

$$\Rightarrow\begin{cases}X=\dfrac{1}{20}\\Y=\dfrac{1}{15}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=20\\b^2=15\end{cases}$$

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) qua điểm A(2; 0) và (E) tiếp xúc với đường thẳng (Δ): $3x-8y+10=0$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

(E) qua A(2; 0); (E) tiếp xúc với đường thẳng (Δ): $3x-8y+10=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}=1\\9a^2+64b^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) tiếp xúc với hai đường thẳng:
(D_1): $x-2\sqrt{3}\,y+3\sqrt{3}=0$ và (D_2): $7x-4\sqrt{3}\,y+9\sqrt{3}=0$

Giải

Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

Do (E) tiếp xúc với (D_1), (D_2) nên ta có hệ.

$$\begin{cases}a^2+12b^2=(3\sqrt{3})^2\\49a^2+48b^2=(9\sqrt{3})^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+12b^2=27\\49a^2+48b^2=243\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=3\\b^2=2\end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

Bài 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình chính tắc của elip (E) biết:

1. (E) có một tiêu điểm $F(\sqrt{3}\,;0)$ và (E) qua $M(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

2. (E) có trục bé bằng 6 và phương trình hai đường chuẩn: $x\sqrt{7}\pm16=0$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip (E) là : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

1. ***Cách 1:***

F($\sqrt{3}$;0) là một tiêu điểm của (E)

$$\Rightarrow \begin{cases} c=\sqrt{3} \\ F'(-\sqrt{3};0) \text{ là tiêu điểm thứ hai của (E)} \end{cases}$$

Ta có $M(1;\frac{\sqrt{3}}{2}) \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\sqrt{(-\sqrt{3}-1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{19}{4}-2\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{19}{4}+2\sqrt{3}}=2a$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{2}+2\sqrt{(\frac{19}{4})^2-(2\sqrt{3})^2}=4a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{2}+2\sqrt{\frac{361}{16}-12}=4a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2=4$$

Khi đó ta có: $b^2=a^2-c^2=4-3=1$

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của elip (E) là : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

Cách 2:

F($\sqrt{3}$;0) là một tiêu điểm của (E)

$$\Rightarrow \begin{cases} c=\sqrt{3} \\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{b^2}=1 \quad (1) \end{cases}$$

Mà $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow \ 3=a^2-b^2 \Rightarrow a^2=3+b^2 \quad (2)$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{1}{3+b^2}+\frac{3}{4b^2}=1 \Rightarrow \quad 4b^4+5b^2-9=0$$

$$\left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=-\frac{9}{4} \quad \text{Phương trình vô nghiệm} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow b^2=1$

Từ (2) $\Rightarrow a^2=4$

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

2. (E) có độ dài trục bé bằng 6; phương trình hai đường chuẩn là: $x\sqrt{7}\pm 16=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}2b=6\\ x=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=3\\ \frac{a^2}{c}=\frac{16}{\sqrt{7}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=3\\ a^2=\frac{16}{\sqrt{7}}.c\end{cases}\ (4)$$

Mà $c^2=a^2-b^2\Rightarrow\ c^2=a^2-9\Rightarrow a^2=9+c^2\quad(5)$

Thay (5) vào (4) ta được: $\quad 9+c^2=\frac{16}{\sqrt{7}}.c$

$$\Rightarrow c^2-\frac{16}{\sqrt{7}}\cdot c+9=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=\sqrt{7}\\ c=\frac{9}{\sqrt{7}}\end{array}\right.$$

+ Với $c=\sqrt{7}$; từ (5) $\Rightarrow a^2=16\Rightarrow$ Phương trình của elip (E) là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

+ Với $c=\frac{9}{\sqrt{7}}$; từ (5) $\Rightarrow a^2=\frac{144}{7}$

$\Rightarrow$ Phương trình của elip (E) là: $\frac{x^2}{\frac{144}{7}}+\frac{y^2}{9}=1$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ hoặc $\frac{x^2}{\frac{144}{7}}+\frac{y^2}{9}=1$.

Bài 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có tâm sai $e=\frac{1}{2}$; khoảng cách giữa 2 đường chuẩn bằng 32.

Giải

Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\text{Ta có}\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ 2\frac{a}{e}=32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2c\\ \frac{a}{\frac{1}{2}}=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2c\\ a=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=4\\ a=8\end{cases}$$

Mà $b^2=a^2-c^2\Rightarrow\quad b^2=64-16=48$

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

Bài 28. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình của elip (E) biết (E) có tâm sai $e = \frac{1}{2}$; một tiêu điểm $F(-4;\ 1)$ và phương trình đường chuẩn (Δ) tương ứng là: $y + 3 = 0$.

Giải

Ta có $M(x;\ y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,\Delta)} = e$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(-4-x)^2 + (1-y)^2}}{|y+3|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{(-4-x)^2 + (1-y)^2} = |y+3|$$

$$\Leftrightarrow 4[(x+4)^2 + (1-y)^2] = (y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x+4)^2 + 3y^2 - 14y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+4)^2 + 3(y - \frac{7}{3})^2 = \frac{64}{3}$$

$\Rightarrow$ Phương trình của elip (E) là: $\frac{(x+4)^2}{\frac{16}{3}} + \frac{(y-\frac{7}{3})^2}{\frac{64}{9}} = 1$

Bài 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình của elip (E) biết $F_1(-3;\ 1)$; $F_2(1;\ 1)$ là các tiêu điểm của (E) và (E) qua $A(1;\ 1-\sqrt{2})$.

Giải

Gọi I là trung điểm đoạn F_1F_2

$\Rightarrow I(-1;\ 1)$

Dời hệ tọa độ Oxy về gốc $I(-1;\ 1)$ bằng cách tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ thành hệ tọa độ IXY công thức đổi hệ tọa độ là:

$$\begin{cases} x = -1 + X \\ y = 1 + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 + x \\ Y = -1 + y \end{cases}$$

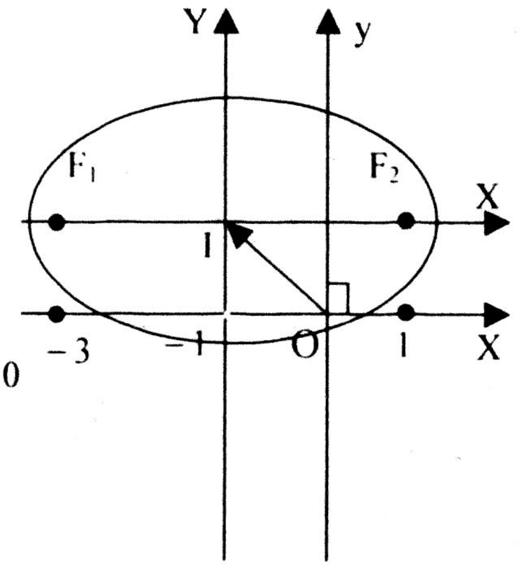
* Trong hệ tọa độ IXY, ta có:

$$+ \begin{cases} X_{F_1} = 1 + x_{F_1} = 1 + (-3) = -2 \\ Y_{F_1} = -1 + y_{F_1} = -1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow F_1(-2;0)$$

$$+ \begin{cases} X_{F_2} = 1 + x_{F_2} = 1 + 1 = 2 \\ Y_{F_2} = -1 + y_{F_2} = -1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow F_2(2;0)$$

$$+ \begin{cases} X_A = 1 + x_A = 1 + 1 = 2 \\ Y_A = -1 + y_A = -1 + 1 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A(2;-\sqrt{2})$$

Trong hệ tọa độ IXY phương trình của elip (E) là:



$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1(1) \end{cases}$$

Mà $c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 4=a^2-b^2 \Rightarrow a^2=4+b^2$

Từ (1) $\Rightarrow \dfrac{4}{b^2+4}+\dfrac{2}{b^2}=1 \Rightarrow b^4-2b^2-8=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=-2 \quad \text{Phương trình vô nghiệm} \\ b^2=4 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow b^2=4 \qquad \Rightarrow a^2=4+4=8$

⇒ Phương trình của elip (E) trong mặt phẳng với hệ toạ độ IXY là: $\dfrac{X^2}{8}+\dfrac{Y^2}{4}=1$

⇒ Phương trình của elip (E) trong hệ Oxy là: $\dfrac{(x+1)^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

Bài 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho (E) là elip có tiêu cự bằng 8, tâm sai $e=\dfrac{4}{5}$. Viết phương trình chính tắc của elip (E).

Giải

Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} 2c=8 \\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ a=5 \end{cases}$

Mặt khác $b^2=a^2-c^2=25-16=9$

⇒ Phương trình chính tắc của (E) là: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Bài 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình chính tắc của elip (E). Biết:

1. (E) có các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}\,;0)$, $F_2(\sqrt{5}\,;0)$ và đi qua điểm $A(1;\ \dfrac{4\sqrt{2}}{3})$
2. (E) có hai đỉnh trên một trục là: $A_1(-6;0)$, $A_2(6;0)$, và một tiêu điểm $F(1;0)$
3. (E) có hai tiêu điểm $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$ và mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới góc vuông.

Giải

1. Phương trình chính tắc của (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

(E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}\,;0)$, $F_2(\sqrt{5}\,;0)$ $\Rightarrow c=\sqrt{5}$

(E) đi qua $A\left(1;\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ nên ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{32}{9b^2}=1 \Rightarrow 9b^2+32a^2=9a^2b^2 \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có: $c^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow a^2-b^2=5 \Rightarrow a^2=5+b^2 \qquad (2)$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$9b^2+32(5+b^2)=9(5+b^2)b^2 \Leftrightarrow 9b^4+4b^2-160=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=4 \\ b^2=\dfrac{-40}{9}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $b^2=4$, từ (2) $\Rightarrow a^2=5+4=9$

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Chú ý: *Có thể xác định a bằng cách dùng hệ thức* $AF_1+AF_2=2a$

2. Phương trình chính tắc của (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

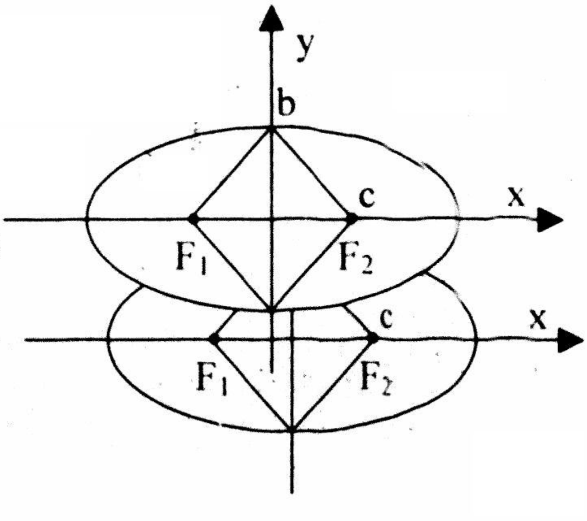
(E) có hai đỉnh $A_1(-6;0)$, $A_2(6;0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=6 \end{cases}$$

Mặt khác, ta có: $b^2=a^2-c^2=36-1=35$

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của (E) là:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{35}=1$$



3. Phương trình chính tắt của (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

(E) có hai tiêu điểm $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$ $\Rightarrow c=3$

Mỗi tiêu điểm của (E) nhìn trục nhỏ của (E) dưới góc vuông nên ta có:

$b=c=3$

Do đó: $a^2=b^2+c^2=2c^2=9.2=18$

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

VI. Dạng 6: Tính chất của elip (E)

Bài 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$ có hai tiêu điểm F_1; F_2. Chứng minh rằng $\forall M \in (E)$, ta có:

1. $MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$
2. $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$

Giải

1. Ta có $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$ là các tiêu điểm của (E).

$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \Leftrightarrow MF_1^2 + MF_2^2 + 2MF_1.MF_2 = 4a^2$ với

$$\begin{cases} MF_1^2 = (-c-x)^2 + y^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2 \\ MF_2^2 = (c-x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2(c^2 + x^2 + y^2) + 2MF_1.MF_2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow c^2 + OM^2 + MF_1.MF_2 = 2a^2$ (vì $O(0;0)$; $OM^2 = x^2 + y^2$)

$\Leftrightarrow MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 + (a^2 - c^2)$

$\Leftrightarrow MF_1 . MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$ (đpcm)

2. Theo câu 1) ta có: $MF_1 . MF_2 = a^2 + b^2 - OM^2$

Do đó $(MF_1 - MF_2)^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2$

$= 2(c^2 + x^2 + y^2) - 2(a^2 + b^2 - OM^2)$

$= 2(c^2 + OM^2) - 2a^2 - 2b^2 + 2OM^2$

$= 4OM^2 - 2b^2 - 2(a^2 - c^2)$ (vì $a^2 - c^2 = b^2$)

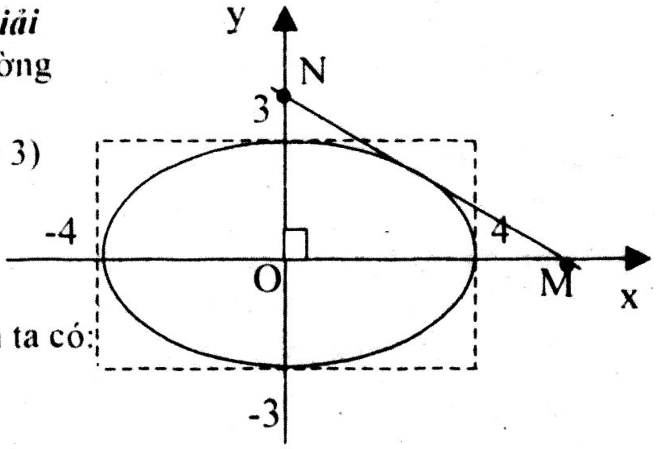
$= 4(OM^2 - b^2)$ (đpcm) .

Bài 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip (E):

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \quad (a > b > 0)$$

Điểm M di động trên tia Ox; N di động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định M; N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải



M thuộc tia Ox; N thuộc tia Oy và đường thẳng MN tiếp xúc với elip (E)

$\Rightarrow M(a; 0)$; $N(0; b)$. (với $a > 4$; $b > 3$)

Phương trình đường thẳng MN là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Đường thẳng MN tiếp xúc với (E) nên ta có:

$$\frac{1}{a^2}.16+\frac{1}{b^2}.9=1 \quad (*)$$

Ta có $MN^2 = a^2 + b^2$

Cách 1:

$$MN^2 = (a^2 + b^2).1 = (a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a^2}.16 + \frac{1}{b^2}.9\right) \geq \left(a.\frac{4}{a} + b.\frac{3}{b}\right)^2 = 7^2 = 49$$

(Bất đẳng thức Bunhiacôpxki)

$\Rightarrow MN \geq 7$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{4}{a}}{a} = \dfrac{\frac{3}{b}}{b} \Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{3}{b^2}$ (1)

Thay (1) vào (*) ta được:

$$\frac{12}{b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b = -\sqrt{21} & \text{(loại)} \\ b = \sqrt{21} > 3 & \end{array}\right.$$

$\Rightarrow b = \sqrt{21}$

Từ (1) $\Rightarrow a^2 = \dfrac{4b^2}{3} = 28 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a = 2\sqrt{7} & \\ a = -2\sqrt{7} & \text{(loại)} \end{array}\right.$

$\Rightarrow M(2\sqrt{7};0);\ N(0;\sqrt{21})$

Khi đó đoạn MN có độ dài nhỏ nhất bằng 7 với $M(2\sqrt{7};0);\ N(0;\sqrt{21})$

Cách 2: $MN^2 = (a^2 + b^2).1 = (a^2 + b^2)\left(\dfrac{1}{a^2}.16 + \dfrac{1}{b^2}.9\right)$

$$= 16 + \frac{9a^2}{b^2} + \frac{16b^2}{a^2} + 9 = 25 + \frac{9a^2}{b^2} + \frac{16b^2}{a^2} \geq 25 + 2\sqrt{9.16} = 49$$

(bất đẳng thức Côsi)

$\Rightarrow MN \geq 7$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{9a^2}{b^2} = \dfrac{16b^2}{a^2} \Leftrightarrow 9a^4 = 16b^4 \Leftrightarrow \dfrac{3}{b^2} = \dfrac{4}{a^2}$

Kết hợp với (*) $\Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{7} \\ b = \sqrt{21} \end{cases}$

Vậy đoạn MN có độ dài nhỏ nhất bằng 7 với $M(2\sqrt{7};0);\ N(0;\sqrt{21})$

Cách 3: $A(x_0;y_0) \in (E)$ $\quad \dfrac{x_0^2}{16} + \dfrac{y_0^2}{9} = 1$ (2)

Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (E) tại A là: $\dfrac{x_0.x}{16} + \dfrac{y_0.y}{9} = 1$;(Δ) cắt tia Ox tại M; (Δ) cắt tia Oy tại N ($x_0 > 0;\ y_0 > 0$)

Khi đó $M\left(\dfrac{16}{x_0};0\right);N\left(0;\dfrac{9}{y_0}\right)$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{16^2}{x_0^2} + \frac{9^2}{y_0^2} = \left(\frac{16^2}{x_0^2} + \frac{9^2}{y_0^2}\right).1$$

$$= \left(\frac{16^2}{x_0^2} + \frac{9^2}{y_0^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9}\right) \geq \left(\frac{16}{x_0}.\frac{x_0}{4} + \frac{9}{y_0}.\frac{y_0}{3}\right)^2 = (4+3)^2 = 49$$

$$\Rightarrow MN \geq 7$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{16}{x_0}}{\frac{x_0}{4}} = \dfrac{\frac{9}{y_0}}{\frac{y_0}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{64}{x_0^2} = \dfrac{27}{y_0^2}$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = \frac{64}{27}y_0^2 \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được: $\dfrac{1}{16}.\dfrac{64}{27}y_0^2 + \dfrac{y_0^2}{9} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{27}y_0^2 = 1 \Leftrightarrow y_0 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad (\text{vì } y_0 > 0)$$

Khi đó, từ (3) $\Rightarrow x_0^2 = \dfrac{64}{27}.\dfrac{27}{7} \Rightarrow x_0^2 = \dfrac{64}{7} \Rightarrow x_0 = \dfrac{8}{\sqrt{7}}$ (vì $x_0 > 0$)

$$\Rightarrow M(2\sqrt{7};0);\quad N\left(0;\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right) \equiv (0;\sqrt{21})$$

Vậy đoạn MN có độ dài nhỏ nhất bằng 7 khi $M(2\sqrt{7};0);\ N(0;\sqrt{21})$.

Bài 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai elip (E_1): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; (E_2): $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ và điểm $M \in (E_1)$, kẻ hai tiếp tuyến MT_1; MT_2 với (E_2)

1) Viết phương trình tiếp tuyến qua T_1 ; T_2 (T_1; T_2 là hai tiếp điểm).

2) Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 tiếp xúc với elip cố định.

Giải

$M(x_M; y_M) \in (E_1) \Leftrightarrow \dfrac{{x_M}^2}{9} + \dfrac{{y_M}^2}{16} = 1 \quad (1)$

$(-3 \leq x_M \leq 3;\ -4 \leq y_M \leq 4)$

Xét hai tiếp điểm $T_1(x_1; y_1)$; $T_2(x_2; y_2)$ thỏa mãn bài toán, ta có :

+) Phương trình tiếp tuyến của (E_2) tại $T_1(x_1; y_1)$ là: $\dfrac{x_1x}{3} + \dfrac{y_1y}{8} = 1$

+) Phương trình tiếp tuyến của (E_2) tại $T_2(x_2; y_2)$ là: $\frac{x_2x}{3}+\frac{y_2y}{8}=1$

Hai tiếp tuyến trên cùng đi qua $M(x_M; y_M)$ nên ta có $\frac{x_1x_M}{3}+\frac{y_1y_M}{8}=1$

và $\frac{x_2x_M}{3}+\frac{y_2y_M}{8}=1$

$\Rightarrow T_1(x_1; y_1); T_2(x_2; y_2)$ thuộc đường thẳng có phương trình $\frac{x_M.x}{3}+\frac{y_M.y}{8}=1$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng T_1T_2 là: $\frac{x_M.x}{3}+\frac{y_M.y}{8}=1$

$\Rightarrow \frac{x_M.x}{3}+\frac{y_M.y}{8}-1=0$ (2)

(Phương trình (2) có dạng $Ax + By + C = 0$)

Cách 1:

Từ(1) $\Leftrightarrow 1.(\frac{x_M}{3})^2+4.(\frac{y_M}{8})^2=(-1)^2$

(Hệ thức này có dạng $b^2A^2+a^2B^2=C^2$ (Với $b^2=1$; $a^2=4$ vì $a > b$)

$\Rightarrow$ Đường thẳng T_1T_2 tiếp xúc elip (E) cố định $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$

Cách 2:

Ta có: (1) nên có thể đặt: $\begin{cases}\frac{x_M}{3}=\sin t\\ \frac{y_M}{4}=\cos t\end{cases}$ (Với $t\in[0; 2\pi$)

$\Rightarrow \begin{cases}x_M=3\sin t\\ y_M=4\cos t\end{cases}$ (Với $t\in[0; 2\pi)$)

(2) $\Rightarrow \frac{3\sin t}{3}x+\frac{4\cos t}{8}y=1$

$\Rightarrow 2\sin t.x+\cos t.y-2=0$ (Phương trình này có dạng $Ax + By + C = 0$)

Mặt khác ta có $(2\sin t)^2.1+(\cos t)^2.4=4\ \forall t\in R$)

(Hệ thức này có dạng $A^2a^2+B^2b^2=C^2$)

$\Rightarrow$ Đường thẳng T_1T_2 tiếp xúc elip (E) cố định

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$

Bài 35: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy chứng minh rằng tích các khoảng cách từ các tiếp điểm của (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=10$ (với a >b >0) đến một tiếp tuyến bất kỳ của (E) bằng một hằng số.

Giải :

Ta có: $M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ (1)

Phương trình tiếp tuyến (Δ)của (E) tại M(x_0 ; y_0) là : $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0b^2)x+(y_0a^2)y-(a^2b^2)=0$$

Mặt khác, ta có $c^2=a^2-b^2$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

$$\text{Ta có } d(F_1,\Delta).d(F_2,\Delta)=\frac{\left|-cx_0b^2-a^2b^2\right|}{\sqrt{x_0^2b^4+a^4y_0^2}}\cdot\frac{\left|cx_0b^2-a^2b^2\right|}{\sqrt{x_0^2b^4+a^4y_0^2}}$$

$$=\frac{\left|a^4b^4-x_0^2b^4c^2\right|}{x_0^2b^4+a^4y_0^2}=b^4\frac{\left|a^4-x_0^2c^2\right|}{x_0^2b^4+a^4y_0^2} \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } a^4-x_0^2c^2=a^4-x_0^2(a^2-b^2)=a^4-x_0^2a^2+x_0^2b^2$$

$$=a^2(a^2-x_0^2)+x_0^2b^2 \quad (2)$$

$$\text{Ta có } \quad (1) \Leftrightarrow a^2-x_0^2=\frac{a^2y_0^2}{b^2} \quad (3)$$

$$\text{Thay (3) vào (2) ta được : } a^4-x_0^2c^2=a^2\left(\frac{a^2y_0^2}{b^2}\right)+x_0^2b^2$$

$$=\frac{a^4y_0^2+x_0^2b^4}{b^2} \quad (4)$$

Thay (4) vào (*) ta được :

$$d(F_1,\Delta).d(F_2,\Delta)=b^2$$

HYPEBOL (H)

A. GHI NHỚ:

I. Định nghĩa $M \in (H) \Leftrightarrow |F_1M - F_2M| = 2a(a > 0)$

II. Các yếu tố của (H) :

(H) có tâm đối xứng O(0;0), hai trục đối xứng Ox;Oy

Các yếu tố của (H)	*(H) có tiêu điểm ∈ Ox*	*(H) có tiêu điểm ∈ Oy*
Phương trình	Phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Tiêu cự	$F_1F_2 = 2c;\ (c^2 = a^2 + b^2)$	
Tâm sai	$e = \frac{c}{a};\ (e > 1)$	
Độ dài trục thực	2a	
Độ dài trục ảo	2b	
Hai đỉnh	$(-a; o); (a; o)$	$(o; -a); (o; a)$
PT các đường chuẩn	$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$	$y = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$
PT các đường tiệm cận	$y = \pm\frac{b}{a}x$ (Tìm y từ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$)	$y = \pm\frac{a}{b}x$ (Tìm y từ : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$)
Tiếp tuyến của (H) tại $M_0(x_0;y_0) \in (H)$	$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$	$\frac{y_0y}{a^2} - \frac{x_0x}{b^2} = 0$
Đường thẳng (Δ) Ax + By + C = 0 tiếp xúc (H), điều kiện:	$a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$ $(C \neq 0)$	$a^2B^2 - b^2A^2 = C^2$ $(C \neq 0)$

Bán kính qua tiêu ứng với M $(x_M; y_M) \in$ (H)	$^*x_M \ge a$ $F_1M = a + \frac{c}{a}x_M = a + ex_M$ $F_2M = -a + \frac{c}{a}x_M = -a + ex_M$ $^*x_M \le -a$ $F_1M = -(a + \frac{c}{a}x_M) = -(a + ex_M)$ $F_2M = -(-a + \frac{c}{a}x_M) = -(-a + ex_M)$	$^*y_M \ge a$ $F_1M = a + \frac{c}{a}y_M = a + ey_M$ $F_2M = -a + \frac{c}{a}y_M = -a + ey_M$ $^*y_M \le -a$ $F_1M = -(a + \frac{c}{a}y_M) = -(a + ey_M)$ $F_2M = -(-a + \frac{c}{a}y_M) = -(-a + ey_M)$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN:

I. Dạng 1: Tìm điểm M thuộc hypebol (H) thỏa mãn điều kiện (*) cho trước:

Phương pháp:

+ $M(x_M ; y_M) \Rightarrow$ phương trình (1) theo $x_M; y_M$

+ Điều kiện (*) $\Rightarrow$ phương trình (2) theo $x_M; y_M$

Giải hệ $\Rightarrow \begin{cases} \text{pt} \quad (1) \\ \text{pt} \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \\ y_M = \end{cases}$

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho Hypebol (H): $9x^2 - y^2 - 9 = 0$

1. Tìm trên (H) những điểm nhìn đoạn nối hai tiêu điểm dưới góc vuông.

2 Tìm trên (H) những điểm nhìn đoạn nối hai tiệu điểm dưới góc $\frac{\pi}{3}$.

3. Tìm trên (H) những điểm có tọa độ nguyên.

Giải

$$(H): 9x^2 - y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$$

1. Ta có: $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 = 10 \quad \Leftrightarrow c = \sqrt{10}$

$M(x_M; y_M) \in (H) \Leftrightarrow 9x_M^2 - y_M^2 = 9$, (1)

M nhìn đoạn nối F_1 ; F_2 dưới góc vuông

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn (C) đường kính F_1F_2.

Vậy C có tâm O(0; 0) bán kính

$R = \frac{F_1F_2}{2} = c = \sqrt{10}$; phương trình: $x^2 + y^2 = 10^2$

$M(x_M; y_M) \in (C)$

$$\Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 = 10 \qquad \Leftrightarrow y_M^2 = 10 - x_M^2 \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$9x_M^2 - (10 - x_M^2) = 9 \Leftrightarrow 10x_M^2 = 19$$

$$\Rightarrow x_M = \pm\frac{\sqrt{190}}{10}$$

Với $x_M^2 = \frac{19}{10}$; từ (2) $\Rightarrow y_M^2 = 10 - \frac{19}{10} = \frac{81}{10} \quad \Rightarrow \quad y_M = \pm\frac{9\sqrt{10}}{10}$

Vậy có 4 điểm thỏa bài toán:

$$\left(\frac{\sqrt{190}}{10}; \frac{9\sqrt{10}}{10}\right); \left(-\frac{\sqrt{190}}{10}; \frac{9\sqrt{10}}{10}\right); \left(\frac{\sqrt{190}}{10}; -\frac{9\sqrt{10}}{10}\right); \left(-\frac{\sqrt{190}}{10}; -\frac{9\sqrt{10}}{10}\right)$$

2. M nhìn đoạn nối hai tiêu điểm dưới góc $\frac{\pi}{3}$

Theo định lý côsin trong $\Delta\ MF_1F_2$:

Ta có: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.\ MF_2.\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - MF_1.\ MF_2$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (MF_1 - MF_2)^2 + MF_1.\ MF_2$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = 4a^2 + \left(\frac{c^2}{a^2}x_M^2 - a^2\right) \qquad (\text{vì } |MF_1 - MF_2| = 2a)$$

$$\Leftrightarrow 40 = 4 + \left(\frac{10}{1}x_M^2 - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 37 = 10x_M^2 \Leftrightarrow x_M^2 = \frac{37}{10} \Leftrightarrow x_M^2 = \pm\frac{\sqrt{370}}{10}$$

Với $x_M^2 = \frac{37}{10}$ từ (1) $\Rightarrow 9\left(\frac{37}{10}\right) - y_M^2 = 9$

$$\Rightarrow y_M^2 = 9\left(\frac{37}{10} - 1\right) = 9.\frac{27}{10}$$

$$\Rightarrow \quad y_M = \pm\frac{9\sqrt{30}}{10}$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn bài toán:

$$\left(\frac{\sqrt{370}}{10}; \frac{9\sqrt{30}}{10}\right); \left(-\frac{\sqrt{370}}{10}; \frac{9\sqrt{30}}{10}\right); \left(\frac{\sqrt{370}}{10}; -\frac{9\sqrt{30}}{10}\right); \left(-\frac{\sqrt{370}}{10}; -\frac{9\sqrt{30}}{10}\right)$$

3. Tìm trên (H) những điểm có tọa độ nguyên

* $M(x_M; y_M) \in (H) \Leftrightarrow 9x_M^2 - y_M^2 = 9 \Leftrightarrow (3x_M - y_M)(3x_M - y_M) = 9$ (*)

(H) có tâm đối xứng O(0; 0) và có hai trục đối xứng là trục Ox; Oy. Do đó nếu $M(x_M; y_M) \in (H)$ thì các điểm $(-x_M; y_M)$ $(x_M; -y_M)$ $(-x_M; -y_M)$ cùng thuộc (H).

Vậy ta chỉ xét $M(x_M; y_M) \in (H)$; x_M, y_M là các số nguyên không âm thỏa mãn (*).

Khi đó $3x_M - y_M \le 3x_M + y_M$; $3x_M + y_M \ge 0$ và $(3x_M - y_M)(3x_M + y_M) = 9$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x_M - y_M = 1 \\ 3x_M + y_M = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x_M - y_M = 3 \\ 3x_M + y_M = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_M = \dfrac{5}{3} \\ y_M = 4 \end{cases} \text{(loại)} \\ \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1;0)$$

$\Rightarrow$ Các điểm thuộc (H) thoả bài toán là: (1;0); (−1;0)

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hypebol

(H): $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Tìm $M \in (H)$ biết:

1. Bán kính qua tiêu điểm bên trái gấp 2 lần bán kính qua tiêu điểm bên phải. (Tức là $MF_1 = 2MF_2$; $F_1(-c;\ 0)$; $F_2(c;\ 0)$)

2. Đoạn F_1M có độ dài nhỏ nhất.

Giải

1. Ta có (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

Hai tiêu điểm của (H) là: $F_1(-5;0)$; $F_2(5;\ 0)$

Ta có $MF_1 = 2MF_2 > MF_2$

$$\Rightarrow M(x_M;\ y_M) \text{ thuộc nhánh phải của (H)} \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x_M \\ MF_2 = -a + \dfrac{c}{a}x_M \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + \frac{c}{a}x_M = 2(-a + \frac{c}{a}x_M) \Rightarrow x_M = \frac{3a^2}{c} = \frac{3.16}{5} = \frac{48}{5}$$

Do $M(x_M;\ y_M) \in (H)$ $\dfrac{x_M^2}{16} - \dfrac{y_M^2}{9} = 1 \Rightarrow y_M^2 = (\dfrac{x_M^2}{16} - 1)9 = \dfrac{9}{25.119}$

$$\Rightarrow y_M = \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$$

$$\Rightarrow M(\frac{48}{5};\frac{3}{5}\sqrt{119});\ \text{Hay}\ M(\frac{48}{5};-\frac{3}{5}\sqrt{119})$$

2. $M(x_M;\ y_M) \in (H)$

Ta có: $F_1M = a + \dfrac{c}{a}x_M$ **(nếu** $x_M \ge a$**).**

$F_1M = -(a + \frac{c}{a}x_M)$ (nếu $x_M \le -a$)

$\Rightarrow F_1M = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right| \ge c - a$ vì $|x_M| \ge a$

$\Rightarrow$ Đoạn F_1M có độ dài nhỏ nhất là $(c - a)$ khi $x_M = -a$

Vậy $M(-a;0)$ (với $a = 4$; $c = 5$)

$\Rightarrow M(-4;0)$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hypebol (H): $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ và $(\Delta) : x - 2y + 1 = 0$.

Tìm $M(x_M; y_M) \in (H)$ sao cho $d(M, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải

$M(x_M; y_M) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{8} - \frac{y_M^2}{4} = 1 \quad (I)$

Ta có $d(M,\Delta) = \frac{|x_M - y_M + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (I)$

Mặt khác ta có: $\Rightarrow |x_M - y_M - 1| = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_M - y_M + 1 = -1 \\ x_M - y_M + 1 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_M - y_M = -2 & (II) \\ x_M - y_M = 0 & (III) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_M = x_M + 2 \\ y_M = x_M \end{array}\right.$$

Kết hợp với (I) ta có hệ:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x_M^2}{8} - \frac{y_M^2}{4} = 1 \\ x_M = 2y_M \end{cases} \quad \text{(Hệ vô nghiệm)} \\ \begin{cases} \frac{x_M^2}{8} - \frac{y_M^2}{4} = 1 \\ y_M = x_M + 2 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_M^2}{8} - \frac{(x_M + 2)^2}{4} = 1 \\ y_M = x_M + 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_M^2 + 8x_M + 16 = 0 \Rightarrow x_M = -4$

$\Rightarrow y_M = -2$

Vậy điểm M cần tìm là $M(-4; -2)$.

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hypebol (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ và $A(3; 2)$; $B(0; -1)$. Tìm $C \in (H)$, sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

Ta có $C(x_C; y_C) \in (H) \quad \Leftrightarrow \dfrac{x_C^2}{9} - \dfrac{y_C^2}{4} = 1 \quad (1)$

Ta có diện tích ΔABC là:

$$S = \frac{1}{2}AB.d(C, AB)$$

Đường thẳng AB qua $B(0; -1)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-3; -3)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình: $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y+1}{-3} \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$

Ta có $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{2}$

Ta có $S = \dfrac{1}{2}.3\sqrt{2}.\dfrac{|x_C - y_C - 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|x_C - y_C - 1|$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}|(x_C - y_C) - 1| \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\big||x_C - y_C| - 1\big| \quad (1$$

Mặc khác ta có:

$$|x_C - y_C| = \left|3.\frac{x_C}{3} - 2.\frac{y_C}{2}\right| \ge \sqrt{(9-4)(\frac{x_C^2}{9} - \frac{y_C^2}{4})} = \sqrt{5.1} = \sqrt{5} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$S \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\sqrt{5} - 1\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Dấy "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{3}x_C = -\dfrac{2}{3}y_C \\ x_C - y_C > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{9}{4}y_C & (II) \\ x_C - y_C > 0 & (III) \end{cases}$

Từ (I); (II) ta có hệ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{9}{4}y_C \\ \dfrac{x_C^2}{9} - \dfrac{y_C^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_C = \dfrac{9}{\sqrt{5}} \\ y_C = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x_C = -\dfrac{9}{\sqrt{5}} \\ y_C = -\dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy diện tích S của ΔABC đạt giá trị nhỏ nhất là $S_{min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} - 1)$

khi $C(\dfrac{9}{\sqrt{5}}; \dfrac{4}{\sqrt{5}})$.

II. Dạng II: Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn điều kiện (*)

Chú ý: Nếu $|MF_1 - MF_2| = 2a$

với $a > 0$; F_1; F_2 cố định ; $F_1F_2 > 2a$ thì quỹ tích điểm M là hypebol (H) có 2 tiêu điểm F_1; F_2 và độ dài trục thực là 2a.

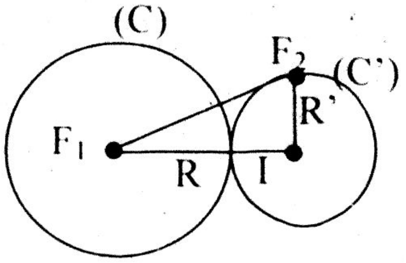
Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C):

$$x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0 \text{ và } F_2(2\sqrt{3}\,;0).$$

Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với (C) và (C') qua $F_2(2\sqrt{3}\,;0)$.

Chú ý: *Đường tròn (C) có tâm F_1, bán kính R tiếp xúc với (C') tâm I; bán kính R'*

$\Leftrightarrow F_1I = R + R'$



Giải

Đường tròn (C) có tâm $F_1(-2\sqrt{3}\,;0)$; bán kính R = 4

Ta có $F_1F_2 > 4 = R \Rightarrow F_2$ ở bên ngoài (C)

Khi đó tồn tại đường tròn (C') tâm I; bán kính R'; (C') tiếp xúc ngoài với (C).

$\Rightarrow IF_1 = R + R'$ mà $R' = IF_2$

$\Rightarrow IF_1 = R + IF_2$ $\Rightarrow IF_1 - IF_2 = R$

$\Rightarrow |IF_1 - IF_2| = 4\,(IF_1 > IF_2)$

Vậy quỹ tích điểm I là nhánh phải của hypebol (H) có 2 tiêu điểm F_1; F_2 và độ dài trục thực 2a = 4.

III. Dạng III: Tiếp tuyến của hypebol (H)

Chú ý:

+ Điều kiện đường thẳng (Δ): Ax + By + C = 0 tiếp xúc với Hypebol (H) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ là: $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$; ($C \neq 0$)

+ Phương trình tiếp tuyến của (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại $M(x_0;y_0) \in (H)$ là:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

+ Điều kiện đường thẳng (Δ): Ax + By + C = 0 tiếp xúc với Hypebol (H) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ là: $-A^2b^2 + B^2a^2 = C^2$; ($C \neq 0$)

+ Phương trình tiếp tuyến của (H): $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ tại $M(x_0;\ y_0) \in (H)$ là:

$$\frac{y_0y}{a^2} - \frac{x_0x}{b^2} = 1$$

Bài 6. Lập phương trình tiếp tuyến của hypebol (H):
$4x^2 - y^2 = 4$ tại $M(2; -2\sqrt{3})$

Giải

Ta có (H): $4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$

Phương trình tiếp tuyến của (H) tại $M(2; -2\sqrt{3})$ là:

$$\frac{x_M x}{1} - \frac{y_M y}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$$

hay $4x + \sqrt{3}y - 2 = 0$.

Bài 7. Lập phương trình tiếp tuyến của (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Biết tiếp tuyến đó song song đường thẳng: $x - y + 1 = 0$.

Giải

Tiếp tuyến (Δ) của (H) song song đường thẳng $x - y + 1 = 0$ nên phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng: $x - y - c = 0$ ($c \neq 0$ và $c \neq 1$)

Theo điều kiện tiếp xúc ta có:

$$16 - 4 = c^2 \Leftrightarrow c^2 = 12 \quad \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{3}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến của (H) thỏa mãn bài toán với phương trình là:

$$x - y + 2\sqrt{3} = 0; \qquad x - y - 2\sqrt{3} = 0$$

Bài 8. Lập phương trình tiếp tuyến của (H): $x^2 - 4y^2 = 20$ tại các giao điểm của (H) và đường thẳng (Δ): $2x - y - 10 = 0$

Giải

Tọa độ các giao điểm của (H) và (Δ) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 20 \\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{14}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy (H) và (Δ) có 2 điểm chung là: $A(6;2)$, $B(\frac{14}{3}; -\frac{2}{3})$.

Ta có (H): $x^2 - 4y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

* Phương trình tiếp tuyến của (H) tại A(6; 2) là: $\frac{6.x}{20} - \frac{2.y}{5} = 1$

$\Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0$

* Phương trình tiếp tuyến của (H) tại B($\frac{14}{3}$; $-\frac{2}{3}$) là:

$$\frac{14}{3}.\frac{x}{20} - (-\frac{2}{3})\frac{y}{5} = 1 \Rightarrow \quad 7x + 4y - 30 = 0$$

Vậy các tiếp tuyến cần tìm của (H) có phương trình:

$3x - 4y - 10 = 0$; $7x + 4y - 30 = 0$

Bài 9. Lập phương trình tiếp tuyến của (H): $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$ biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng (d): $2x + 3y - 1 = 0$.

Chú ý: *(d): $Ax + By + C = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A;B)$. Đường thẳng (Δ) ⊥ (d)*

⇒ $\vec{n}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ).

⇒ Vectơ $\vec{n_1} = (B;-A)$ là một vectơ pháp tuyến của (Δ).

⇒ Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng $Bx - Ay + C' = 0$

Giải

Ta có (H): $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

Tiếp tuyến (Δ) của (H) vuông góc với đường thẳng (d): $2x + 3y - 1 = 0$

⇒ Phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng: $3x - 2y + C = 0$; $(C \neq 0)$

(Δ) là tiếp tuyến của (H) nên ta có:

$9.5 - 4.4 = C^2 \quad \Leftrightarrow C^2 = 29 \quad \Leftrightarrow C = \pm\sqrt{29}$

Vậy có hai tiếp tuyến của (H) thỏa mãn bài toán với phương trình là:

$3x - 2y + \sqrt{29} = 0$; $\quad 3x - 2y + \sqrt{29} = 0$

Bài 10. Lập phương trình tiếp tuyến của (H): $x^2 = 4y^2 + 4$ biết tiếp tuyến đó tạo với đường thẳng (d): $x - 2y + 1 = 0$ một góc 45^0.

Giải

Ta có (H): $x^2 = 4y^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

Đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(A;B)$.

Đường thẳng (d): $x - 2y + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;-2)$.

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của (H) và (Δ) tạo với đường thẳng (d): $x - 2y + 1 = 0$ một góc 45^0

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A^2 - B^2 = C^2 \quad (C \neq 0) \\ \cos 45^0 = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A^2 - B^2 = C^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{|A - 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A^2 - B^2 = C^2 & (1) \\ 3A^2 + 8AB - 3B^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = -3B \\ A = \dfrac{B}{3} \end{array}\right.$

* Với $A = -3B \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Khi đó từ (1) $\Rightarrow C^2 = 4.9B^2 - B^2 = 35B^2 \Rightarrow C = \pm\sqrt{35}.B$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của (H) là: $-3Bx + By \pm\sqrt{35}.B = 0$

Hay $-3x + y \pm\sqrt{35} = 0$

* Với $A = \dfrac{B}{3} \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Khi đó từ (1) $\Rightarrow C^2 = 4\dfrac{B^2}{9} - B^2 = -\dfrac{5B^2}{9} < 0$

Vậy có 2 tiếp tuyến của (H) là: $-3x + y + \sqrt{35} = 0$; $-3x + y - \sqrt{35} = 0$

Bài 11. Lập phương trình tiếp tuyến của (H): $25x^2 - 16y^2 + 400 = 0$ biết tiếp tuyến đó qua A(4,1).

Giải

Ta có (H): $25x^2 - 16y^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

Đường thẳng (Δ) qua A(4; 1) có phương trình là:

$A(x - 4) + B(y - 1) = 0$; $(A^2 + B^2 \neq 0)$

$\Rightarrow Ax + By - (4A + B) = 0$

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của (H) khi và chỉ khi:

$25B^2 - 16A^2 = (4A+B)^2$; $-4A - B \neq 0$

$\Leftrightarrow 24B^2 - 8AB - 32A^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = -A \\ B = \dfrac{4}{3}A \end{array}\right.$

* Với $B = -A \Rightarrow A \neq 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (H) là: $A(x - 4) - A(y - 1) = 0$

$\Rightarrow x - y - 3 = 0$ $(A \neq 0)$

* Với $B = \dfrac{4}{3}A \Rightarrow A \neq 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (H) là: $A(x-4)+\frac{4}{3}A(y-1)=0$

$\Rightarrow 3x+4y-16=0$

Vậy qua A có hai tiếp tuyến với (H) là:

$x-y-3=0$; $3x+4y-16=0$

Bài 12. Lập phương trình tiếp tuyến của (H): $5x^2-4y^2-20=0$ biết khoảng cách từ tâm đối xứng của (H) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{3}$.

Giải

Ta có (H): $5x^2-4y^2-20=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

Tâm đối xứng của (H) là O(0;0)

Đường thẳng (Δ): $Ax+By+C=0$; $(A^2+B^2\neq 0)$

(Δ) là tiếp tuyến của (H) thỏa mãn bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C\neq 0 \\ 4A^2-5B^2=C^2 \\ d(O,\Delta)=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C\neq 0 \\ 4A^2-5B^2=C^2 \\ \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{3} \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C\neq 0 \\ 4A^2-5B^2=C^2 \quad (1) \\ C^2=3(A^2+B^2) \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4A^2-5B^2=3(A^2+B^2)$

$$\Rightarrow A^2=8B^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A=2\sqrt{2}.B \\ A=-2\sqrt{2}.B \end{array}\right.$$

* Với $A=2\sqrt{2}.B \Rightarrow B\neq 0$ (vì $A^2+B^2\neq 0$)

Từ (1) $\Rightarrow C^2=27B^2 \Rightarrow C=\pm 3\sqrt{3}B$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (H) là: $2\sqrt{2}Bx+By\pm 3\sqrt{3}B=0$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}x+y\pm 3\sqrt{3}=0$

* Với $A=-2\sqrt{2}.B \Rightarrow B\neq 0$ (vì $A^2+B^2\neq 0$)

Từ (1) $\Rightarrow C^2=27B^2 \Rightarrow C=\pm 3\sqrt{3}B$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (H) là: $-2\sqrt{2}Bx+By\pm 3\sqrt{3}B=0$

$\Rightarrow -2\sqrt{2}x+y\pm 3\sqrt{3}=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến với (H) thoả mãn bài toán là:

$2\sqrt{2}x+y+3\sqrt{3}=0$; $2\sqrt{2}x+y-3\sqrt{3}=0$

$$-2\sqrt{2}\,x + y + 3\sqrt{3} = 0\ ;\ -2\sqrt{2}\,x + y - 3\sqrt{3} = 0$$

Bài 13. Cho (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

1. Lập phương trình tiếp tuyến (d) của (H) qua M(2, −1).
2. Gọi M là tiếp điểm của (d) và (H). Chứng minh rằng (d) là đường phân giác góc $\widehat{F_1MF_2}$.

Giải

1. Phương trình đường thẳng (d) qua M(2; −1) là:

$$A(x-2) + B(y+1) = 0\ ;\quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow Ax + By + B - 2A = 0$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (H)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B - 2A \neq 0 \\ 16A^2 - 4B^2 = (B-2A)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B - 2A \neq 0 \\ 12A^2 + 4AB - 5B^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B - 2A \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{B}{2} \\ A = -\dfrac{5}{6}B \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow A = -\frac{5}{6}B$$

$$\Rightarrow B \neq 0\quad (\text{ vì } A^2 + B^2 \neq 0)$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến (d) của (H) là:

$$-\frac{5}{6}B(x-2) + B(y+1) = 0 \Rightarrow -5x + 6y + 16 = 0$$

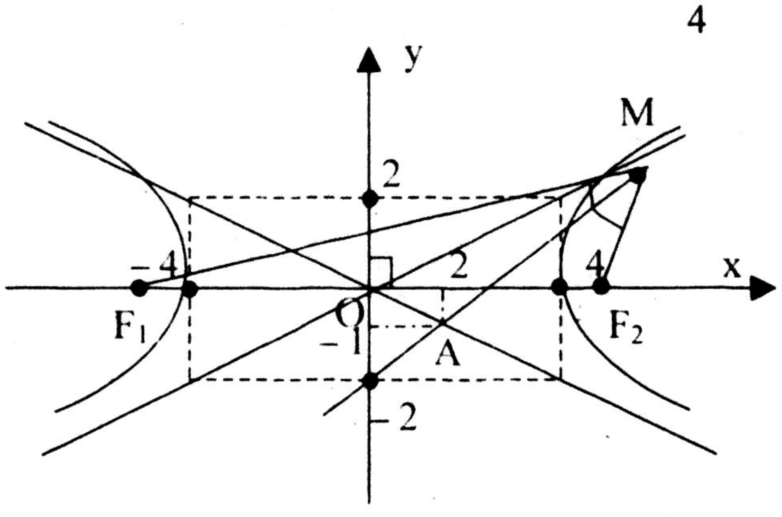
Vậy qua M(2; − 1) có một tiếp tuyến với (H) là: $-5x + 6y + 16 = 0$

2. Gọi $M(x_0;y_0) \in (H)$ là tiếp điểm của (H) và (d). Phương trình tiếp tuyến (d) ở trên có thể viết lại:

$$\frac{x_0x}{16} - \frac{y_0y}{4} = 1 \qquad (x_0 \neq 0)$$

Gọi $D = (d) \cap Ox$

$$\Rightarrow D(\frac{16}{x_0};0)$$



$$(H) \text{ có } \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4;\ b = 2 \\ c^2 = a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4;\ b = 2 \\ c = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_1(-2\sqrt{5}\ ;\ 0)\ F_2(2\sqrt{5}\ ;\ 0) \Rightarrow DF_1 = \left|-2\sqrt{5} - \frac{16}{x_0}\right| = \left|\frac{16 + 2\sqrt{5}.x_0}{x_0}\right|$$

$$\text{và}\quad DF_2 = \left|2\sqrt{5} - \frac{16}{x_0}\right| = \left|\frac{-16 + 2\sqrt{5}.x_0}{x_0}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{DF_1}{DF_2} = \left|\frac{16 + 2\sqrt{5}.x_0}{16 - 2\sqrt{5}.x_0}\right| \quad (1)$$

Mặt khác ta có $M(x_0;y_0) \in (H)$

$$\Rightarrow \begin{cases} MF_1^2 = \left|a + \dfrac{c}{a}x_0\right|^2 \\ MF_2^2 = \left|-a + \dfrac{c}{a}x_0\right|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MF_1}{MF_2} = \frac{\left|a + \dfrac{c}{a}x_0\right|}{\left|-a + \dfrac{c}{a}x_0\right|} = \frac{\left|a^2 + cx_0\right|}{\left|-a^2 + cx_0\right|} = \frac{\left|16 + 2\sqrt{5}.x_0\right|}{\left|-16 + 2\sqrt{5}.x_0\right|} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{DF_1}{DF_2} = \dfrac{MF_1}{MF_2}$

$\Rightarrow$ Đường thẳng (d) là đường phân giác góc $\widehat{F_1MF_2}$ (đpcm)

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hypebol (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Gọi F là một tiêu điểm của (H) ($x_F < 0$) và I là trung điểm của đoạn OF.
Viết phương trình các đường thẳng tiếp xúc với (H) và đi qua I.

Giải

Ta có (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow F(-5;\ 0);\ I(-\frac{5}{2}\ ;\ 0)$$

Đường thẳng (Δ) qua I có phương trình là: $A(x + \dfrac{5}{2}) + By = 0\ (A^2 + B^2 \neq 0)$

$$\Rightarrow Ax + By + \frac{5}{2}A = 0$$

Đường thẳng (Δ) tiếp xúc với (H): $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{2}A \neq 0 \\ 16A^2 - 9B^2 = \dfrac{25}{4}A^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B^2 = \dfrac{39}{36}A^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} B = \dfrac{\sqrt{39}}{6}A \\ B = -\dfrac{\sqrt{39}}{6}A \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \neq 0 \\ B = \dfrac{\sqrt{39}}{6}A \end{cases} \\ \begin{cases} A \neq 0 \\ B = -\dfrac{\sqrt{39}}{6}A \end{cases} \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $B = \dfrac{\sqrt{39}}{6}A$, $A \neq 0$. Ta có phương trình đường thẳng (Δ) qua I và tiếp xúc với (H) là: $Ax + \dfrac{\sqrt{39}}{6}Ay + \dfrac{5}{2}A = 0 \quad \Rightarrow 6x + \sqrt{39}\,y + 15 = 0$

Trường hợp 2: $B = -\dfrac{\sqrt{39}}{6}A$, $A \neq 0$. Ta có phương trình đường thẳng (Δ) qua I và tiếp xúc với (H) là: $Ax - \dfrac{\sqrt{39}}{6}Ay + \dfrac{5}{2}A = 0 \Rightarrow 6x - \sqrt{39}\,y + 15 = 0$

Vậy có 2 đường thẳng qua I và tiếp xúc với (H) là:

$6x + \sqrt{39}\,y + 15 = 0$; $6x - \sqrt{39}\,y + 15 = 0$

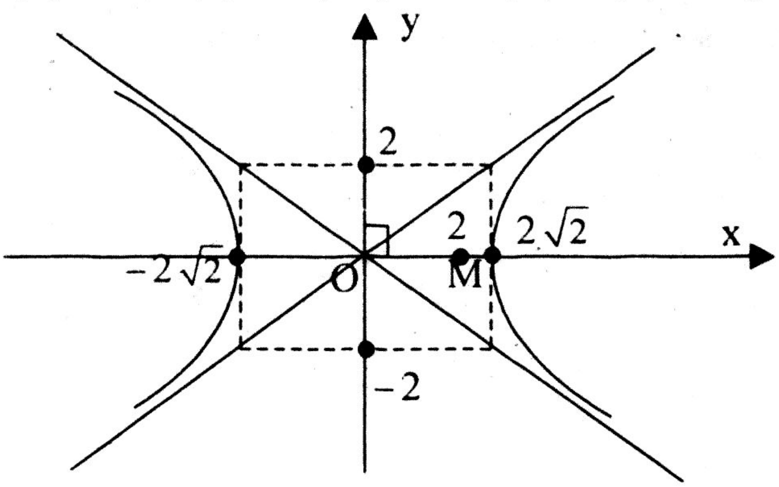
Bài 15. Cho hypebol (H): $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Chứng minh rằng qua M(2; 0) có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với (H). Lập phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm.

Giải

* Đường thẳng (Δ) qua M và (Δ) // Oy $\Rightarrow$ (Δ): $x = 2$

Khi đó (Δ) không là tiếp tuyến của (H).

* Đường thẳng (Δ) qua M và (Δ) là tiếp tuyến của (H) $\Rightarrow$ (Δ) không song song Oy.



$\Rightarrow$ Phương trình (Δ) có dạng: $y = k(x - 2) \Rightarrow kx - y - 2k = 0$

(Δ) là tiếp tuyến của (H):

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2k \neq 0 \\ 8k^2 - 4 = 4k^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2k \neq 0 \\ 4k^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -1 \end{array}\right.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến của (H) qua M(2;0) với phương trình là:

$y = x - 2$; $y = -x + 2$

* Viết phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm:

Cách 1: Tiếp điểm của (H) và tiếp tuyến của (H) qua M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = x - 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp điểm thỏa mãn bài toán là: (4; 2); (4; −2).

Do đó phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm trên là $x = 4$.

Cách 2: Gọi $N(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của (H) và tiếp tuyến (Δ) của (H) qua M. Ta có.

+ $N(x_0;y_0) \in (H) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{8} - \dfrac{y_0^2}{4} = 1 \quad (1)$

+ Phương trình (Δ): $\dfrac{x_0x}{8} - \dfrac{y_0y}{4} = 1$

$M(2;0) \in (\Delta) \Leftrightarrow \dfrac{2.x_0}{8} - \dfrac{0.y_0}{4} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 4$

Khi đó; từ (1) $\Rightarrow y_0^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 2 \\ y_0 = -2 \end{array}\right.$

Vậy N(4;2) hoặc N(4; − 2)

$\Rightarrow$ Có hai tiếp điểm thỏa mãn bài toán: (4; 2); (4; − 2)

+ Phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm là: $x = 4$.

Cách 3: Xét $N_1(x_1;y_1)$; $N_2(x_2;y_2)$ lần lượt là các tiếp điểm của (H) và hai tiếp tuyến của (H) qua M(2;0).

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến MN_1 của (H) là: $\dfrac{x_1x}{8} - \dfrac{y_1y}{4} = 1$

và phương trình tiếp tuyến MN_2 của (H) là: $\dfrac{x_2x}{8} - \dfrac{y_2y}{4} = 1$

Các tiếp tuyến này cùng qua M(2;0) nên ta có:

$$\frac{x_1x_M}{8} - \frac{y_1y_M}{4} = 1 \; ; \quad \frac{x_2x_M}{8} - \frac{y_2y_M}{4} = 1$$

⇒ N_1; N_2 thuộc đường thẳng có phương trình: $\frac{xx_M}{8} - \frac{yy_M}{4} = 1$ ⇒ Phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm N_1; N_2 là:

$$\frac{xx_M}{8} - \frac{yy_M}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x.2}{8} - \frac{y.0}{4} = 1 \Rightarrow x = 4$$

Bài 16. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (H_1):

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } (H_2)\text{: } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{1} = 1$$

Giải

Nhận xét: (H_1) và (H_2) không có tiếp tuyến chung song song hoặc trùng Oy.

Do đó tiếp tuyến chung (Δ) của (H_1) ; (H_2) có phương trình dạng

$y = Ax + C$ (điều kiện $C \neq 0$)

$\Rightarrow \; Ax - y + C = 0$

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến chung của (H_1) và (H_2) nên ta có hệ

$$\begin{cases} 9A^2 - 4 = C^2 & (1) \\ 6A^2 - 1 = C^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) − (2) vế theo vế ta được:

$$3A^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ A = -1 \end{array}\right.$$

Với $A = \pm 1$; từ (2) $\Rightarrow C^2 = 5 \Rightarrow C = \pm\sqrt{5}$

Vậy (H_1) ; (H_2) có 4 tiếp tuyến chung:

$y = x + \sqrt{5}$; $y = x - \sqrt{5}$; $y = -x + \sqrt{5}$; $y = -x - \sqrt{5}$

Bài 17. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (H) : $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{27} = 1$

và (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Giải

(H) và (E) không có tiếp tuyến chung song song hoặc trùng Oy

Do đó tiếp tuyến chung của (H) và (E) có phương trình dạng:

$y = Ax + C$ ($C \neq 0$)

$\Rightarrow Ax - y - C = 0$

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến chung của (H) và (E), nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 8A^2 - 27 = C^2 & (1) \\ 4A^2 + 9 = C^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) vế theo vế ta được:

$$4A^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 3 \\ A = -3 \end{array}\right.$$

Với $A = \pm 3$. Từ (2) $\Rightarrow C^2 = 45 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = 3\sqrt{5} \\ C = -3\sqrt{5} \end{array}\right.$

Vậy (H) và (E) có 4 tiếp tuyến chung là:

$y = 3x + 3\sqrt{5}$; $y = 3x - 3\sqrt{5}$; $y = -3x + 3\sqrt{5}$; $y = -3x - 3\sqrt{5}$

Bài 18. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ và đường tròn (C): $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

Giải

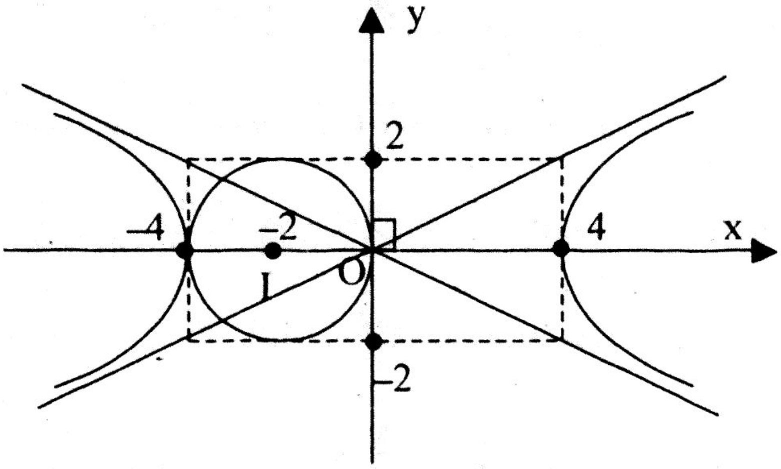
(C) có tâm $I(-2; 0)$; bán kính $R = 2$.

Trường hợp 1: Đường thẳng (Δ) song song hoặc trùng Oy có phương trình dạng $x = x_0$.

Dường thẳng (Δ) là tiếp tuyến chung của (H) và (C), ta có hệ:

$$\begin{cases} 16.1 - 4.0 = (-x_0)^2 \\ d(I, \Delta) = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 4 \\ \dfrac{|-2 - x_0|}{\sqrt{1}} = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_0 = -4$



Trường hợp 2: Đường thẳng (Δ) không song song, không trùng Oy

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) là: $y = Ax + C$

(Δ) là tiếp tuyến của (C) và (H), ta có hệ:

$$\begin{cases} C \neq 0 \\ 16A^2 - 4 = C^2 \\ d(I,\Delta) = R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \neq 0 \\ C^2 - 16A^2 + 4 = 0 \quad (1) \\ \dfrac{|-2A + C|}{\sqrt{A^2+1}} = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow |C - 2A| = 2\sqrt{A^2+1} \quad \Leftrightarrow (C - 2A)^2 = 4A^2 + 4$

$\Leftrightarrow \quad C^2 - 4AC - 4 = 0 \quad (3)$

Lấy (1) + (3) vế theo vế ta được

$$2C^2 - 4AC - 16A^2 = 0 \quad (*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = -2A \\ C = 4A \end{array}\right.$$

(phương trình (*) được xem là phương trình bậc hai ẩn số C)

* Với $C = -2A \Rightarrow A \neq 0$ (vì $C \neq 0$)

Khi đó, từ (1) ta có: $-12A^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \quad (C = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}) \\ A = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \quad (C = \dfrac{2}{\sqrt{3}}) \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Có hai tiếp tuyến chung với (H) và (C) là:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}} \quad ; \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

* Với $C = 4A \Rightarrow A \neq 0$ (vì $C \neq 0$)

Khi đó, từ (1) ta có: $0.A^2 + 4 = 0$: Phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Vậy có 3 tiếp tuyến chung của (H) và (C) là:

$$X = -4; \; y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

IV. Dạng 4: Tìm tâm sai và các yếu tố của hypebol:

Bài 19. Cho Hypebol (H) xác định tiêu cự; tiêu điểm; tâm sai; tọa độ các đỉnh; độ dài các trục. Tìm phương trình các đường tiệm cận của (H) và vẽ (H). Biết phương trình của (H) là:

1. $x^2 - 4y^2 = 16$
2. $16x^2 - 9y^2 = 1$
3. $\dfrac{y^2}{5} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{1}{20}$
4. $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$

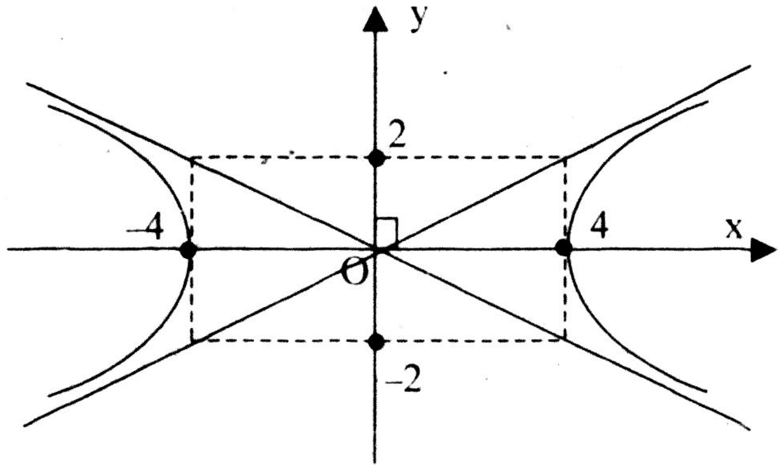
Giải

1. (H): $x^2 - 4y^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4;\ b = 2 \\ c^2 = a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4;\ b = 2 \\ c = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

- + Tiêu cự của (H) là: $F_1F_2 = 2c = 4\sqrt{5}$
- + Tiêu điểm của (H)là: $F_1(-2\sqrt{5} ; 0)$; $F_2(2\sqrt{5} ;0)$
- + Tâm sai của (H) là: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- + Các đỉnh của (H) là: $(-4; 0); (4; 0)$
- + Độ dài trục thực là: $2a = 8$
- + Độ dài trục ảo là: $2b = 4$
- + Phương trình các đường tiệm cận của (H) là: $y = \pm\frac{1}{2}x$

* Vẽ (H):



2. (H): $16x^2 - 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{16}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{16} \\ b^2 = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4};\ b = \frac{1}{3} \\ c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{9} = \frac{25}{144} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4};\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{5}{12} \end{cases}$$

- + Tiêu cự của (H) là: $F_1F_2 = 2c = \frac{5}{6}$
- + Tiêu điểm của (H) là: $F_1(-\frac{5}{12} ; 0)$; $F_2(\frac{5}{12} ; 0)$
- + Tâm sai của (H) là: $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}$

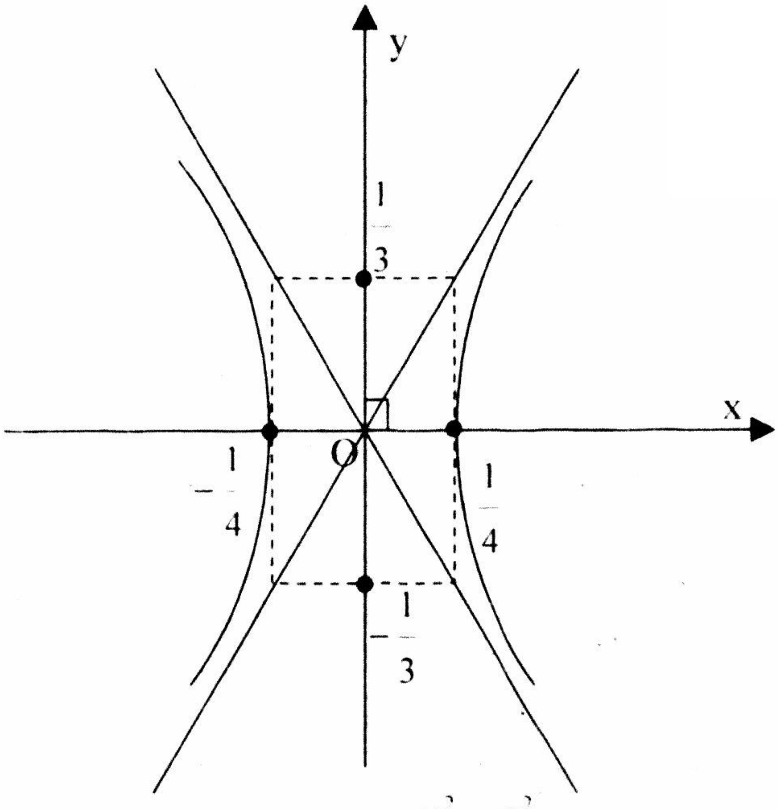
+ Các đỉnh của (H) là: $(-\frac{1}{4};0)$; $(\frac{1}{4};0)$

+ Độ dài trục thực là: $2a = \frac{1}{2}$

+ Độ dài trục ảo là: $2b = \frac{2}{3}$

+ Phương trình các đường tiệm cận của (H) là: $y = \pm\frac{4}{3}x$

* Vẽ (H):



3. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow 4y^2 - 5x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{5}} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2};\ b = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2};\ b = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c = \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

+ Tiêu cự của (H) là: $F_1F_2 = 2c = \frac{3}{\sqrt{5}}$

+ Tiêu điểm của (H)là: $F_1(0; -\frac{3}{2\sqrt{5}})$; $F_2(0; \frac{3}{2\sqrt{5}})$

+ Tâm sai của (H) là: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

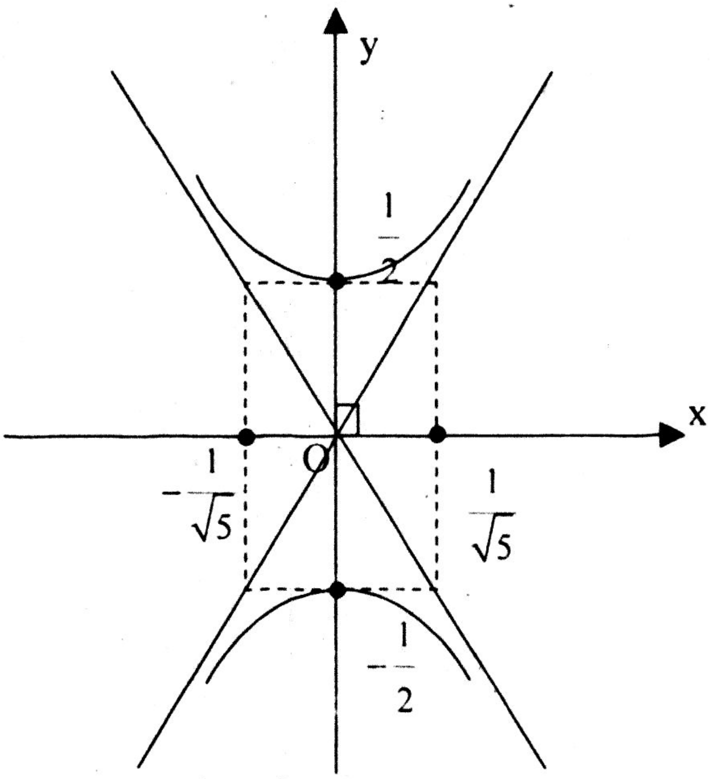
+ Các đỉnh của (H) là: $(0; -\frac{1}{2}); (0; \frac{1}{2})$

+ Độ dài trục thực là: $2a = 1$

+ Độ dài trục ảo là: $2b = \frac{2}{\sqrt{5}}$

+ Phương trình các đường tiệm cận của (H) là: $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

* Vẽ (H):



4. (H): $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3;\ b = 2 \\ c^2 = a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3;\ b = 2 \\ c = \sqrt{13} \end{cases}$$

+ Tiêu cự của (H) là: $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{13}$

+ Tiêu điểm của (H)là: $F_1(0; -\sqrt{13})$; $F_2(0; \sqrt{13})$

+ Tâm sai của (H) là: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

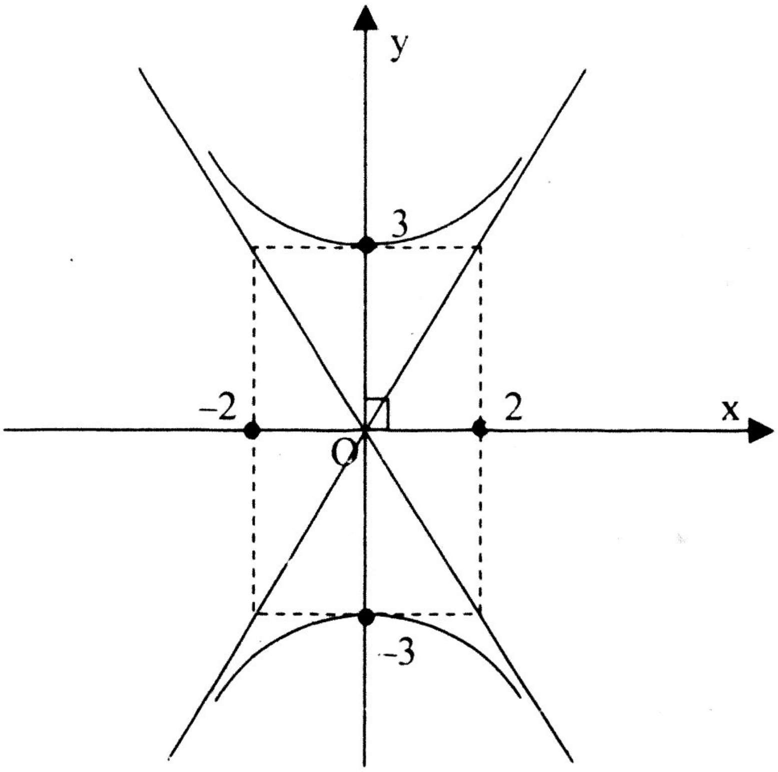
+ Các đỉnh của (H) là: $(0; -3); (0;3)$

+ Độ dài trục thực là: $2a = 6$

+ Độ dài trục ảo là: $2b = 4$

+ Phương trình các đường tiệm cận của (H) là: $y = \pm\frac{3}{2}x$

* Vẽ (H):



Bài 20. Cho Hypebol (H) : $\frac{y^2}{99}-\frac{x^2}{33}=1$. Tính góc tạo bởi hai đường tiệm cận của (H).

Giải

(H): $\frac{y^2}{99}-\frac{x^2}{33}=1$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2=99\\ b^2=33\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a=3\sqrt{11}\\ b=\sqrt{33}\end{cases}$$

Phương trình các đường tiệm cận của (H): $y = \ = \pm\sqrt{3}\,x$

$(\Delta_1): y=\sqrt{3}x \Leftrightarrow \sqrt{3}x-y=0$; $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3};-1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Δ_1).

$(\Delta_2): y=-\sqrt{3}x \Leftrightarrow \sqrt{3}x+y=0$; $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3};1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Δ_2).

Gọi φ là góc tạo bởi hai đường tiệm cận của (H) ta có:

$$0^0\le\varphi\le 90^0 \quad \text{và} \quad \cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|3-1|}{\sqrt{4}.\sqrt{4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Từ đó $\Rightarrow\varphi=60^0$

Bài 21. Cho (H): $16x^2 - 9y^2 = 144$

1. Xác định tiêu điểm; tiêu cự; tâm sai; độ dài các trục; tọa độ các đỉnh; phương trình các đường tiệm cận của (H) và vẽ (H).
2. Tìm trên (H) những điểm nhìn đoạn nối hai tiêu điểm dưới góc vuông.
3. Tìm những điểm trên (H) sao cho khoảng cách từ nó đến tiêu điểm bên trái gấp hai lần khoảng cách từ nó đến tiêu điểm bên phải.

Giải

(H): $16x^2 - 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

1. Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

* Tiêu điểm: $F_1(-5; 0)$; $F_2(5; 0)$

*Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = 10$

* Tâm sai: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3}$

* Độ dài trục thực: $2a = 6$

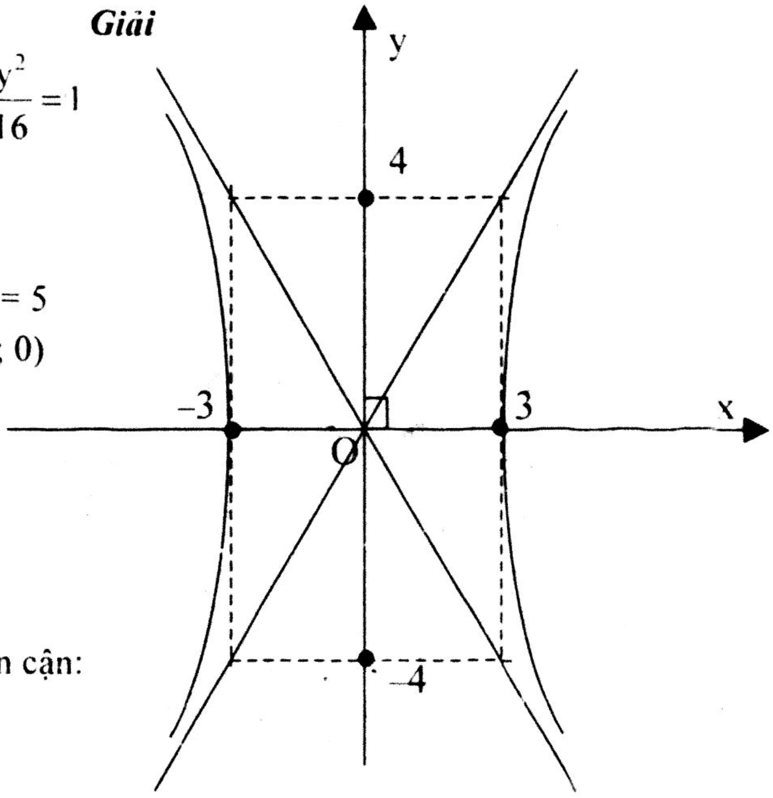
* Độ dài trục ảo: $2b = 8$

* Đỉnh: $(-3; 0)$; $(3; 0)$

* Phương trình các đường tiệm cận:

$y = \pm\dfrac{4}{3}x$

* Vẽ (H):



2. $M(x_M; y_M) \in (H) \Leftrightarrow 16x_M^2 - 9y_M^2 = 144$ (1)

**Cách 1*: Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{F_1M} = (x_M + 5; y_M) \\ \overrightarrow{F_2M} = (x_M - 5; y_M) \end{cases}$

M nhìn đoạn nối F_1 ; F_2 dưới góc vuông

$\Rightarrow MF_1 \perp MF_2 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M} = 0$

$\Leftrightarrow (x_M + 5)(x_M - 5) + y_M^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_M^2 - 25 + y_M^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 = 25$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 16x_M^2 - 9y_M^2 - 144 = 0 \\ x_M^2 + y_M^2 - 25 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M^2 = \dfrac{9 \cdot 41}{25} \\ y_M^2 = \dfrac{16^2}{25} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_M = \dfrac{3\sqrt{41}}{5} \\ x_M = -\dfrac{3\sqrt{41}}{5} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y_M = \dfrac{16}{5} \\ y_M = -\dfrac{16}{5} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Có 4 điểm thỏa bài toán:

$(\frac{3\sqrt{41}}{5};\frac{16}{5})$; $(-\frac{3\sqrt{41}}{5};\frac{16}{5})$; $(\frac{3\sqrt{41}}{5};-\frac{16}{5})$; $(-\frac{3\sqrt{41}}{5};-\frac{16}{5})$

* ***Cách 2***: M nhìn đoạn nối 2 tiêu điểm F_1 ; F_2 dưới góc vuông

=> M thuộc đường tròn (C) có đường kính F_1F_2 và có tâm O(0; 0) bán kính $R = \frac{F_1F_2}{2} = 5$

Phương trình của đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 = 25$

$\Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 = 25 \qquad \Leftrightarrow x_M^2 = 25 - y_M^2 \qquad (2)$

Thay (2) vào (1) ta được:

$16(25 - y_M^2) - 9y_M^2 = 144 \Leftrightarrow 16(25 - 9) = 25y_M^2$

$\Leftrightarrow y_M^2 = \frac{16^2}{25} \qquad \Leftrightarrow y_M = \pm\frac{16}{5}$

Với $y_M^2 = \frac{16^2}{25}$ từ (2) $\Rightarrow x_M^2 = 25 - \frac{16^2}{25} = \frac{25^2 - 16^2}{25}$

$\Rightarrow x_M^2 = \frac{9.41}{25} \qquad x_M = \pm\frac{3\sqrt{41}}{5}$

Vậy có 4 điểm thỏa bài toán:

$(\frac{3\sqrt{41}}{5};\frac{16}{5})$; $(-\frac{3\sqrt{41}}{5};\frac{16}{5})$; $(\frac{3\sqrt{41}}{5};-\frac{16}{5})$; $(-\frac{3\sqrt{41}}{5};-\frac{16}{5})$

3. Theo bài ra ta có: $M \in (H)$ và $MF_1 = 2\,MF_2 \qquad (3)$

Do đó $MF_1 > MF_2 \Rightarrow \begin{cases} x_M \geq a \\ 16x_M^2 - 9y_M^2 = 144 \end{cases} \qquad (1)$

Khi đó: $\begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M \\ MF_2 = -a + \frac{c}{a}x_M \end{cases} \qquad (*)$

Thay (*) vào (3) ta được:

$a + \frac{c}{a}x_M = 2(-a + \frac{c}{a}x_M)$

$\Leftrightarrow 3a = \frac{c}{a}x_M$

$\Leftrightarrow x_M = \frac{3a^2}{c} = \frac{27}{5}$

Thay $x_M = \frac{27}{5}$ vào (1) ta được:

$16.\frac{27^2}{25} - 9y_M^2 = 144$

$$16.\frac{27^2}{25} - 144 = 9{y_M}^2$$

$$\Leftrightarrow 9{y_M}^2 = \frac{16}{5}(27^2 - 9.25)$$

$$\Leftrightarrow 9{y_M}^2 = \frac{16}{5}(27^2 - 15^2)$$

$$\Leftrightarrow 9{y_M}^2 = \frac{16}{25}\cdot 12\cdot 42$$

$$\Leftrightarrow 9{y_M}^2 = \frac{16\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 14}{25}$$

$$\Leftrightarrow 9{y_M}^2 = \frac{16\cdot 2^2\cdot 14}{25}$$

$$\Rightarrow {y_M}^2 = \pm\frac{8\sqrt{14}}{5}$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn bài toán:

$$(\frac{27}{5};\frac{8\sqrt{14}}{5})\ ;\ (\frac{27}{5};\ \frac{8\sqrt{14}}{5}).$$

Bài 22. Tính tâm sai của Hypebol (H) biết:

1. Hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.
2. Góc giữa 2 đường tiệm cận bằng $\frac{\pi}{3}$.

Giải

1. Không mất tính tổng quát, giả sử (H) có phương trình chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ta có: tâm sai của (H) là: $e = \frac{c}{a}$

Do hai đường tiệm cận vuông góc với nhau $\Rightarrow a = b$

Mà $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 \qquad \Rightarrow c = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow e = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

2. Góc giữa hai đường tiệm cận bằng $\frac{\pi}{3}$

Ta có hai đường tiệm cận là:

$$(\Delta_1):\ y = -\frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx + ay = 0$$

$(\Delta_2): y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx - ay = 0$

$(\Delta_1); (\Delta_2)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là: $\overrightarrow{n_1}(b;a)$; $\overrightarrow{n_2}(b;-a)$

Ta có $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|b^2 - a^2|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+b^2}}$

$$a^2 + b^2 = 2(|b^2 - a^2|) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 2(b^2 - a^2) \\ a^2 + b^2 = -2(b^2 - a^2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a^2 = b^2 \\ 3b^2 = a^2 \end{array}\right.$$

+ Với $b^2 = 3a^2$

$$\Rightarrow 4a^2 = c^2 \Rightarrow \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow e = 2$$

+ Với $a^2 = 3b^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{3} = b^2 \Rightarrow \frac{4.a^2}{3} = c^2 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow e = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Vậy tâm sai của (H) là: $e = 2$ hoặc $e = \frac{2}{\sqrt{3}}$

V. Dạng 5: Viết phương trình của hypebol:

Bài 23. Lập phương trình của Hypebol (H) có hai trục đối xứng là Ox; Oy và qua hai điểm $M(4; \sqrt{6})$; $N(\sqrt{6}; -1)$.

Giải

*** Trường hợp 1**: (H) có tiêu điểm thuộc Ox; phương trình của Hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (phương trình chính tắc)

Do (H) đi qua $M(4; \sqrt{6})$; $N(\sqrt{6}; -1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} - \frac{6}{b^2} = 1 \\ \frac{6}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{a^2} - \frac{6}{b^2} = 1 \\ \frac{36}{a^2} - \frac{6}{b^2} = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{6}{a^2} - 1 \\ \frac{20}{a^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2} \\ a^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

*** Trường hợp 2:** (H) có tiêu điểm thuộc Oy; phương trình của hypebol (H) có dạng: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Do (H) đi qua M(4; $\sqrt{6}$) ; N($\sqrt{6}$;–1) nên ta có:

$$\begin{cases}\frac{6}{a^2}-\frac{4^2}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1\\ \frac{6}{a^2}-\frac{36}{b^2}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{20}{b^2}=-5\\ \frac{1}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1\end{cases}\text{ (hệ vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình của hypebol (H) cần tìm là: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

Bài 24. Cho $F_1(-5;2)$; $F_2(3;2)$. Viết phương trình của hypebol (H) nhận F_1 ; F_2 làm các tiêu điểm, tâm sai e = 2

Giải

Gọi I là trung điểm đoạn $F_1F_2 \Rightarrow I(-1;2)$

Dời hệ trục tọa độ Oxy về gốc I(–1; 2) bằng cách tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$ thành hệ trục tọa độ IXY. Do F_1; F_2 thuộc IX nên trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy phương trình của (H) có dạng:

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

Ta có: $c=\frac{F_1F_2}{2}=\frac{\sqrt{(-8)^2+0^2}}{2}=\frac{8}{2}=4$

Mặt khác do: $e=\frac{c}{a}=2 \Rightarrow a=\frac{c}{2}=2$

Mà $c^2=a^2+b^2 \quad\Rightarrow b^2=c^2-a^2=16-4=12$

$\Rightarrow$ Phương trình của (H) là : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

Công thức đổi hệ trục tọa độ là:

$$\begin{cases}x=-1+X\\ y=2+Y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=x+1\\ Y=y-2\end{cases}$$

Do đó phương trình của (H) trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy là:

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$$

Bài 25. Hypebol (H) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{13}\ ;\ 0)$; $F_2(\sqrt{13}\ ;\ 0)$; (H) qua $A(3\sqrt{2}\ ;\ 2)$ và cho đường thẳng (Δ): $x - 6y + 6 = 0$

1. Viết phương trình của (H).

2. Chứng minh rằng: (Δ) cắt (H) và hai đường tiệm cận của (H)

3. Gọi M và N; P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng Δ với (H) và với hai đường tiệm cận. Chứng minh MP = QN.

Giải

1. Phương trình của (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Theo đề ra ta có: $c = \sqrt{13}$ với $c^2 = a^2 + b^2$ (*)

Ta lại có $A(-\sqrt{13}\ ;\ 0) \in (H) \Rightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{(-\sqrt{13} - 3\sqrt{2})^2 + 2^2} - \sqrt{(\sqrt{13} - 3\sqrt{2})^2 + 2^2}\right| = 2a$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{35 + 6\sqrt{26}} - \sqrt{35 - 6\sqrt{26}}\right| = 2a$$

$$\Leftrightarrow 70 - 2\sqrt{(35)^2 - (6\sqrt{26})^2} = 4a^2 \Leftrightarrow 70 - 2\sqrt{289} = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 70 - 2.17 = 4a^2 \Leftrightarrow a^2 = 9$$

Khi đó từ (*) $\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 4$

2. Ta có tọa độ giao điểm (x; y) của (Δ) và (H) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1 & (1) \\ x - 6y + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x = 6y - 6$ (3)

Thay (3) vào (1) ta được: $\dfrac{36(y-1)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

$$\Leftrightarrow 4(y-1)^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 15y^2 - 32y + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{16 + 2\sqrt{19}}{15} \\ y = \dfrac{16 - 2\sqrt{19}}{15} \end{array}\right.$$

+ Với $y = \dfrac{16 + 2\sqrt{19}}{15}$, từ (3) $\Rightarrow x = 6.\dfrac{16 + 2\sqrt{19}}{15} - 6 = \dfrac{2 + 4\sqrt{19}}{5}$

+ Với $y = \dfrac{16 - 2\sqrt{19}}{15}$, từ (3) $\Rightarrow x = \dfrac{2 - 4\sqrt{19}}{5}$

Vậy (Δ) và (H) cắt nhau tại 2 điểm: $\left(\dfrac{2 + 4\sqrt{19}}{5}\ ;\ \dfrac{16 + 2\sqrt{19}}{15}\right)$; $\left(\dfrac{2 - 4\sqrt{19}}{5}\ ;\ \dfrac{16 - 2\sqrt{19}}{15}\right)$

3. Tự giải.

PARABOL (P)

A. GHI NHỚ:

I. Định nghĩa $M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M, \Delta)$

F; (Δ): cố định; $F \notin (\Delta)$; F: tiêu điểm; (Δ): đường chuẩn.

II. Các yếu tố của (P): (P) có đỉnh O(0; 0)

$d(F, (\Delta)) = P > 0$ (P tham số tiêu).

Trục đối xứng	*Phương trình*	*Tiêu điểm F* *Đ/chuẩn : (Δ)*	*Bán kính qua tiêu ($M \in (P)$)*	*Đk để đường thẳng (d) $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc P*
Ox	$y^2 = 2px$ $(x \ge 0)$	$F(\frac{P}{2}; 0)$ $x = -\frac{P}{2}$	$MF = \frac{P}{2} + x_M$	$PB^2 = 2AC$
	$y^2 = -2px$ $(x \le 0)$	$F(-\frac{P}{2}; 0)$ $x = \frac{P}{2}$	$MF = \frac{P}{2} - x_M$	$PB^2 = -2AC$
Oy	$x^2 = 2py$ $(y \ge 0)$	$F(0; \frac{P}{2})$ $y = -\frac{P}{2}$	$MF = \frac{P}{2} + y_M$	$PA^2 = 2BC$
	$x^2 = -2py$ $(y \le 0)$	$F(0; -\frac{P}{2})$ $y = \frac{P}{2}$	$MF = \frac{P}{2} - y_M$	$PA^2 = -2BC$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN:

I. Dạng 1: Tìm các yếu tố của parabol

Chú ý: *Gọi hình chiếu vuông góc K của đỉnh S của parabol (P) trên đường chuẩn (Δ), khi đó ta có S là trung điểm đoạn KF (Với F là tiêu điểm của parabol (P)).*

Bài 1. Tìm tọa độ tiêu điểm; tham số tiêu; tọa độ đỉnh và phương trình đường chuẩn của parabol (P) biết:

1. $y^2 - 4x = 0$
2. $2y^2 + 9x = 0$
3. $y = x^2$
4. $x^2 + 6y = 0$
5. $(y - 1)^2 = 8(x + 2)$
6. $y = x^2 - 2x + 1$

Giải

1. (P): $y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4x$ (phương trình có dạng $y^2 = 2px$)

Ta có $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$

Vậy parabol (P) có:
* Đỉnh O(0; 0)
* Tham số tiêu: $p = 2$
* Tọa độ tiêu điểm F(1; 0)
* Phương trình đường chuẩn (Δ): $x = -1$

2. (P): $2y^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{9}{2}x$ (phương trình có dạng $y^2 = -2px$)

Ta có $2p = \frac{9}{2} \Leftrightarrow p = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{p}{2} = \frac{9}{8}$

Vậy parabol (P) có:
* Đỉnh O(0; 0)
* Tham số tiêu: $p = \frac{9}{4}$
* Tọa độ tiêu điểm $F(-\frac{9}{8}; 0)$
* Phương trình đường chuẩn (Δ): $x = \frac{9}{8}$

3. (P): $y = x^2 \Leftrightarrow x^2 = y$ (phương trình có dạng $x^2 = 2py$)

Ta có $2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{4}$

Vậy parabol (P) có:
* Đỉnh O(0; 0)
* Tham số tiêu: $p = \frac{1}{2}$
* Tọa độ tiêu điểm $F(0; \frac{1}{4})$
* Phương trình đường chuẩn (Δ): $y = -\frac{1}{4}$

4. (P): $x^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 = -6y$ (phương trình có dạng $x^2 = -2py$)

Ta có $2p = 6 \Leftrightarrow p = 3 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$

Vậy parabol (P) có:

* Đỉnh O(0; 0)
* Tham số tiêu: p = 3
* Tọa độ tiêu điểm $F\left(0; -\frac{3}{2}\right)$
* Phương trình đường chuẩn (Δ): $y = \frac{3}{2}$

5. (P): $(y-1)^2 = 8(x+2)$ (1)

Xét hệ $\begin{cases} y-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$

Dời hệ trục tọa độ Oxy về gốc S(−2; 1) bằng cách tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OS}$. thành hệ trục tọa độ SXY

Công thức đổi hệ trục tọa độ là $\begin{cases} x=-2+X \\ y=1+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=2+x \\ Y=-1+y \end{cases}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $Y^2 = 8X$

Vậy trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ SXY, phương trình của (P) có dạng

$Y^2 = 2pX$

Do đó ta có $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 2$

Vậy trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ SXY parabol (P) có:

* Đỉnh S
* Tham số tiêu: p = 4
* Tọa độ tiêu điểm F(2; 0)
* Phương trình đường chuẩn (Δ): X = −2

Vậy trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, parabol (P) có:

* Đỉnh S(−2; 1)
* Tham số tiêu: p = 4
* Tiêu điểm F: $\begin{cases} x_F = -2 + X_F = -2 + 2 = 0 \\ y_F = 1 + Y_F = 1 + 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow F(0; 1)$
* Phương trình đường chuẩn (Δ): $2 + x = -2 \Leftrightarrow x = -4$ (vì X = 2 + x)

6. (P) : $y = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = y$ (3)

Xét hệ $\begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Dời hệ trục tọa độ Oxy về gốc S(1;0) bằng cách tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OS}$ thành hệ trục tọa độ SXY

Công thức dời hệ trục tọa độ là $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -1 + x \\ Y = y \end{cases}$ (4)

Thay (3) vào (4) ta được: $X^2 = Y$

Vậy trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ SXY, phương trình của (P) có dạng
$X^2 = 2pY$

Do đó ta có $2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{4}$

Vậy trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ SXY Parabol (P) có:

* Đỉnh S
* Tham số tiêu: $p = \frac{1}{2}$
* Tọa độ tiêu điểm $F(0; \frac{1}{4})$
* Phương trình đường chuẩn (Δ): $Y = -\frac{1}{4}$

Vậy trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, parabol (P) có:

* Đỉnh S(1; 0)
* Tham số tiêu: $p = \frac{1}{2}$
* Tiêu điểm F: $\begin{cases} x_F = 1 + X_F = 1 + 0 = 1 \\ y_F = Y_F = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow F(1; \frac{1}{4})$
* Phương trình đường chuẩn (Δ): $y = -\frac{1}{4}$ (vì Y = y)

Bài 2. Trong mặt phẳngvới hệ tọa độ Oxy cho parabol (P): $y^2 = 12x$.

1. Tìm tọa độ tiêu điểm: tham số tiêu; và phương trình đường chuẩn của (P).

2. Một điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2. Tìm khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm của (P).

3. Qua I(2; 0) vẽ một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt (P) tại hai điểm A; B. Chứng minh rằng tích số các khoảng cách từ A và B đến trục Ox là một số không đổi.

Giải

1. (P): $y^2 = 12x$ (phương trình có dạng $y^2 = 2px$)

Ta có $2p = 12 \Leftrightarrow p = 6 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 3$

Vậy parabol (P) có:

* Tham số tiêu: $p = 6$

* Tọa độ tiêu điểm $F(3; 0)$

* Phương trình đường chuẩn (Δ): $x = -3$

2. Ta có: $MF = \frac{p}{2} + x_M = 3 + 2 = 5$

Vậy $MF = 5$.

3. ***Cách 1*:**

***Trường hợp 1**: Đường thẳng (Δ) qua $I(2; 0)$ không song song Oy

Đường thẳng (Δ) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nên phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0)$$

Do đường thẳng (Δ) qua $I(2; 0) \Rightarrow 0 = 2a + b \Leftrightarrow b = -2a$

Phương trình (Δ): $y = ax - 2a$

Tọa độ giao điểm A; B của (Δ) và (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = 12x & (1) \\ y = ax + (-2a) & (2) \end{cases}$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow xa = y + 2a \Leftrightarrow x = \frac{y + 2a}{a} \qquad (3) \qquad (\text{vì } a \neq 0)$

Thay (3) vào (1) ta được:

$$y^2 = 12.\frac{y + 2a}{a} \qquad \Leftrightarrow ay^2 - 12y - 24a = 0 \quad (4)$$

Phương trình (4) luôn có hai nghiệm phân biệt y_A, y_B

(vì $\Delta' = (-6)^2 + 24a^2 > 0$)

$$\Rightarrow y_A y_B = \frac{-24a}{a} = -24 \qquad (\text{vì } a \neq 0)$$

Do đó tích các khoảng cách từ A; B đến trục Ox là:

$d(A, Ox).\ d(B, Oy) = |y_A||y_B| = |y_A.y_B| = |-24| = 24$ (Không đổi)

(điều phải chứng minh)

***Trường hợp 2**: Đường thẳng (Δ) qua $I(2; 0)$ song song Oy. Khi đó phương trình (Δ) là $x = 2$. Tọa độ giao điểm A; B của (Δ) và (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = 12x \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 = 24 \Rightarrow y^2 - 24 = 0 \quad (5)$$

Phương trình (5) luôn có hai nghiệm phân biệt $y_A; y_B$. Với $y_A y_B = -24$

Do đó tích các khoảng cách từ A; B đến trục Ox là:

$d(A, Ox).d(B, Oy) = |y_A||y_B| = |y_A.y_B| = |-24| = 24$ (Không đổi)

Cách 2: Đường thẳng (Δ) qua I(2; 0) phương trình có dạng :

$$A_1(x-2)+B_1y=0 \quad (\text{Với } A_1^2+B_1^2\neq 0)$$

Tọa độ giao điểm A; B của (Δ) và (P) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2=12x & (1)\\ A_1(x-2)+By=0 & (7)\end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow x=\dfrac{y^2}{12}$ (8)

Thay (8) vào (7) ta được: $A_1(\dfrac{y^2}{12}-2)+B_1y=0 \Leftrightarrow A_1\dfrac{y^2}{12}+B_1y-2A_1=0$ (9)

***Trường hợp 1**: $A_1=0 \Rightarrow B_1\neq 0$ (vì $A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}\neq 0$)

Khi đó (9) trở thành $B_1\,y=0 \Rightarrow y=0$. Từ (8)$\Rightarrow$ x = 0

Vậy (Δ) và (P) có một điểm chung duy nhất O(0;0) (không thỏa bài toán)

***Trường hợp 2**: $A_1\neq 0$

Phương trình (9) có $\Delta = B_1^{\ 2}-4(\dfrac{A_1}{12}).(-2A_1)=B_1^{\ 2}+\dfrac{2}{3}A_1^{\ 2}>0$

$\Rightarrow$ Phương trình (9) luôn có hai nghiệm phân biệt y_A, y_B .

$$\Rightarrow y_Ay_B=\frac{-2A_1}{\dfrac{A_1}{12}}=-24$$

Do đó tích các khoảng cách từ A; B đến trục Ox là:

$d(A, Ox).d(B, Oy)=|y_A||y_B|=|y_A.y_B|=|-24|=24$ (Không đổi)

II. Dạng II :

Tìm điểm $M(x_M\,;\,y_M)$ thuộc parabol (P) thỏa mãn điều kiện (*) cho trước.

Phương pháp: + $M(x_M\,;\,y_M)\in(P)$ ta có phương trình (1) theo $x_M\,;\,y_M$

+ Khai thác điều kiện (*) cho trước ta có phương trình (2) theo $x_M\,;\,y_M$

+ Giải hệ $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Rightarrow x_M;\,y_M$

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho (P): $y^2=2x$

1. Tìm điểm trên (P) có bán kính qua tiêu điểm bằng 2.
2. Tìm hai điểm A; B trên (P) sao cho ΔOAB đều.

Giải

1. (P): $y^2=2x$ (phương trình có dạng $y^2=2px$)

với $2p=2 \Leftrightarrow p=1 \Leftrightarrow \dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}$

Gọi $M(x_M\,;\,y_M)\in(P) \Leftrightarrow y_M^{\ 2}=2x_M$ (1)

Theo đề ra, ta có: FM = 2

$$\Leftrightarrow x_M + \frac{p}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x_M + \frac{1}{2} = 2 \qquad \Leftrightarrow x_M = \frac{3}{2}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow y_M^2 = 2x_M = 2.\ \frac{3}{2} \Leftrightarrow y_M = \pm\sqrt{3}$

Vậy có hai điểm thuộc (P) thỏa mãn bài toán là:

$$(\frac{3}{2}; \sqrt{3});\ (\frac{3}{2}; -\sqrt{3})$$

2. (P): $y^2 = 2x$ có trục đối xứng là Ox

Mặt khác A,B $\in$ (P) và ΔOAB đều nên A,B đối xứng qua Ox

Không mất tính tổng quát giả sử $A(x_A; y_A) \in (P)$, $y_A > 0$

$$\Rightarrow y_A^2 = 2x_A\ (x_A > 0)$$

$$\Rightarrow B(x_A; -y_A)$$

Ta có: $x_A = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2y_A\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔOAB đều và $AB = \sqrt{(-y_A - y_A)^2} = \sqrt{4y_A^2}$)

Hay: $x_A = y_A\sqrt{3}$ $(y_A > 0)$ (1)

Mặt khác: $y_A^2 = 2x_A$

$$\Leftrightarrow y_A^2 = 2y_A\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y_A = 2\sqrt{3}\ \text{(vì } y_A > 0\text{)}$$

Từ (1) $\Rightarrow x_A = 6$ Do đó: $A(6; 2\sqrt{3})$; $B(6; -2\sqrt{3})$

Bài 2. Cho (P): $y^2 = 4x$ (1) và (Δ) : $x + y + m = 0$ (2)

1. Với m = 2, tìm điểm $A \in (P)$ sao cho khoảng cách từ A đến (Δ) nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

2. Định m để (P) và (Δ) cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N sao cho FM + FN = 5 (F là tiêu điểm của (P)).

Giải

1. Với m = 2, phương trình (Δ) trở thành: $x + y + 2 = 0$

Ta có $A(x_A; y_A) \in (P) \Leftrightarrow y_A^2 = 4x_A;\ x_A \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{y_A^2}{4} = x_A$ (*); $x_A \geq 0$

Ta có khoảng cách từ A đến (Δ) là:

$$d(A, \Delta) = \frac{|x_A + y_A + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\frac{y_A^2}{4} + y_A + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|(\frac{y_A}{2} + 1)^2 + 1\right|}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{y_A}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow y_A = -2$

Từ (*) $\Rightarrow x_A = 1 \Rightarrow A(1; -2)$

Vậy khoảng cách từ A đến (Δ) đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ khi A(1; −2)

2. Ta có: (2) $\Leftrightarrow y = -(x + m)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (Δ) là:

$(x + m)^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 + 2(m - 2)x + m^2 = 0$

Mặt khác: $M(x_M; y_M)$; $N(x_N; y_N)$ là các giao điểm phân biệt của (P) và (Δ)

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-2)^2 - m^2 = -4m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \\ x_M + x_N = 4 - 2m \qquad (3) \end{cases}$$

Ta có $FM = \frac{p}{2} + x_M$ và $FN = \frac{p}{2} + x_N \Rightarrow \begin{cases} FM = 1 + x_M \\ FN = 1 + x_N \end{cases}$

Theo đề ra ta có $FM + FN = 5$

$\Leftrightarrow (x_M + 1) + (x_N + 1) = 5$

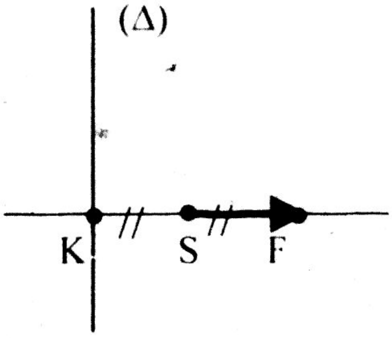
$\Leftrightarrow x_M + x_N = 3$ (4)

Thay (4) vào (3) ta được:

$4 - 2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện m > 1)

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{1}{2}$

III. Dạng 3 : Viết phương trình parabol



Chú ý: *+ Gọi hình chiếu vuông góc K của đỉnh S của parabol (P) trên đường chuẩn(Δ), khi đó ta có S là trung điểm đoạn KF (Với F là tiêu điểm của parabol (P).*

Đường chuẩn (Δ) qua K và nhận $\overrightarrow{SF}$ làm vectơ pháp tuyến.

+ Tiêu điểm F, đỉnh S thuộc trục đối xứng của parabol (P)

+ Khoảng cách từ đỉnh S đến đường chuẩn của (P) bằng $\frac{P}{2}$ *(*P *là tham số tiêu)*

Bài 1. Lập phương trình parabol biết Ox là trục đối xứng; O(0; 0) là đỉnh và parabol đi qua A(4; 16).

Giải

* Phương trình parabol (P) có dạng: $y^2 = 2px \quad (x \geq 0)$ (1)

hoặc $y^2 = -2px \quad (x \leq 0)$ (2)

Do $A(4; 16) \in (p)$ mà $x_A = 4 > 0$ nên phương trình Parabol (P) là.

$y^2 = 2px$

$A(4; 16) \in (p) \Leftrightarrow 16^2 = 2p.4$

$\Leftrightarrow 2p = 64$

$\Leftrightarrow p = 32$

Phương trình (P) là: $y^2 = 64x$.

Bài 2. Lập phương trình của parabol (P) biết (P) có:

1. Tiêu điểm F(−1; 0), có trục đối xứng Ox, có đỉnh O(0;0).
2. Đỉnh O(0; 0); qua A(2; 3) và nhận Oy làm trục đối xứng.
3. Tiêu điểm F(2; 4) và có đường chuẩn là Ox.
4. Đỉnh S(−2; 3), đường chuẩn là trục Oy.
5. Đỉnh S(2; 4) và tiêu điểm F(1; 2).

Giải

1. (P) có tiêu điểm F(−1; 0), có trục đối xứng Ox, có đỉnh O(0; 0)

$\Rightarrow$ Phương trình (P) có dạng:

$$y^2 = -2px \text{ với } \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2$$

$\Rightarrow$ Phương trình (P) là: $y^2 = -4x$

2. (P) có đỉnh O(0; 0) và nhận Oy làm trục đối xứng nên phương trình (P) có dạng:

$x^2 = 2py \ (y \geq 0)$ hoặc $x^2 = -2py \ (y \leq 0)$

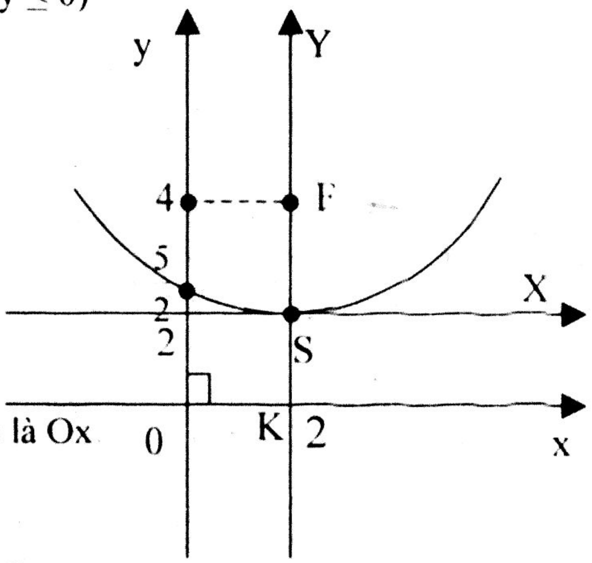
Mặt khác do (P) qua A(2; 3) có: $y_A = 3 > 0$

Nên phương trình (P) là $x^2 = 2py$

$A(2; 3) \in (p) \Leftrightarrow 4 = 6p$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình (P) là: } x^2 = \frac{4}{3}y$$



3. ***Cách 1:***

(P) có tiêu điểm F(2; 4) và có đường chuẩn là Ox

$\Rightarrow$ Tham số tiêu của (P) là:

$P = d(F, Ox) = |y_F| = 4$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của F trên Ox

$\Rightarrow K(2; 0)$

Khi đó đỉnh S của (P) là trung điểm đoạn KF

$\Rightarrow S(2; 2)$

Dời hệ trục tọa độ Oxy về gốc S(2; 2) bằng cách tịnh tiến theo $\overrightarrow{OS}$. Công thức dời hệ trục tọa độ là:

$$\begin{cases} x = 2 + X \\ y = 2 + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 2 \end{cases} \qquad (*)$$

Trong hệ trục tọa độ SXY ta có :

$$F: \begin{cases} X_F = x_F - 2 = 2 - 2 = 0 \\ Y_F = y_F - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow F(0; 2)$$

Và (P) có trục đối xứng là SY

Do đó phương trình của (P) có dạng là: $X^2 = 2PY$

Với $p = 4 \Rightarrow X^2 = 8Y$ (1)

Thay (*) vào (1) ta được phương trình của (P) trong hệ tọa độ Oxy là:

$$(x - 2)^2 = 8(y - 2)$$

***Cách 2:* (Dùng định nghĩa)**

Parabol (P) có tiêu điểm F(2; 4) và đường chuẩn là trục Ox

Do đó, ta có:

$$M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow d(M, Ox) = MF$$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{(x - 2)^2 + (4 - y)^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (x - 2)^2 + 16 - 8y + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 8(y - 2)$$

4. (P) có đỉnh S(−2; 3) và đường chuẩn là trục Oy

***Cách 1*: (Định nghĩa)**

Gọi K là hình chiếu của S trên Oy ⇒ K(0; 3)

$$\begin{cases} x_S = \dfrac{x_K + x_F}{2} \\ y_S = \dfrac{y_K + y_F}{2} \end{cases} \qquad \text{(Với F là tiêu điểm của (P))}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 2x_S - x_K = -4 \\ y_F = 2y_S - y_K = 3 \end{cases} \Leftrightarrow F(-4; 3)$$

Theo bài ra ta có:

$$M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow d(M, Oy) = MF$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{(-4 - x)^2 + (3 - y)^2}$$

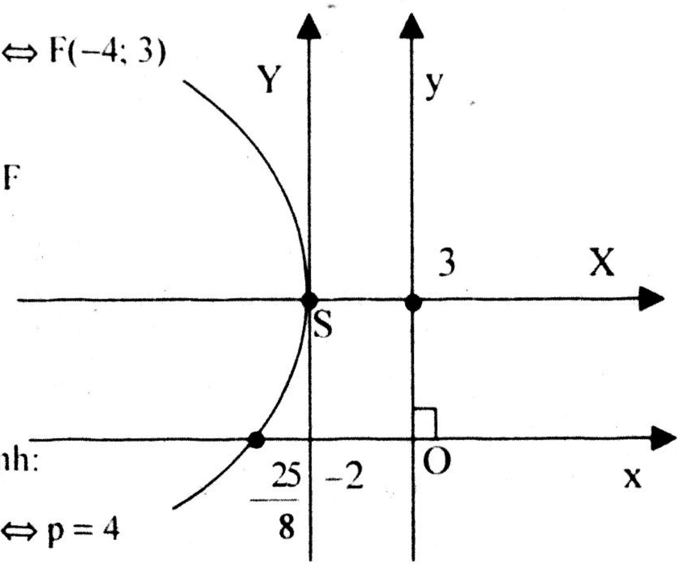
$$\Leftrightarrow x^2 = (x + 4)^2 + (y - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)^2 = -8(x + 2)$$

Cách 2:

* Tham số tiêu của (P) được xác định:

$$\frac{p}{2} = d(S, Oy) = |x_S| = |-2| = 2 \Leftrightarrow p = 4$$



Dời hệ trục tọa độ Oxy về gốc S(2; 2) bằng cách tịnh tiến theo $\overline{OS}$; thành hệ trục tọa độ SYX

Công thức dời hệ trục tọa độ là:

$$\begin{cases} x = -2 + X \\ y = 3 + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 3 \end{cases} \quad (*)$$

Trong hệ trục tọa độ SXY ta có phương trình của (P) là:

$$Y^2 = -2PX \quad \Leftrightarrow \quad Y^2 = -8X \quad (1)$$

Thay (*) vào (1) ta được phương trình của (P) trong hệ tọa độ Oxy là:

$$(y - 3)^2 = -8(x + 2)$$

5. (P) đỉnh S(2; 4) và tiêu điểm F(1; 2)

* Gọi K là điểm đối xứng của F qua S

$\Rightarrow$ S là trung điểm đoạn FK

$$\Rightarrow \begin{cases} x_K = 2x_S - x_F = 3 \\ y_K = 2y_S - y_F = 6 \end{cases} \Rightarrow K(3; 6)$$

$\Rightarrow$ Đường chuẩn (Δ) của (P) đi qua K(3; 6)

$\Rightarrow$ và nhận $\overline{FS}$ =(1; 2) làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ Phương trình đường chuẩn (Δ) là:

$$(x - 3) + 2(y - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 15 = 0$$

$M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow d(M, \Delta) = MF$

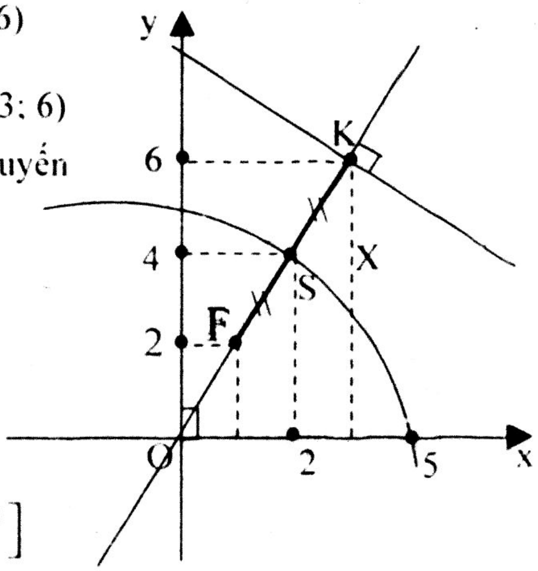
$$\Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 15|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(1 - x)^2 + (2 - y)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y - 15)^2 = 5\left[(1 - x)^2 + (2 - y)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + 225 + 4xy - 30x - 60y = 5(1 - 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 4xy + 20x + 40y - 200 = 0$$

Vậy phương trình của (P) là $4x^2 + y^2 - 4xy + 20x + 40y - 200 = 0$.



Bài 3. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình của parabol (P) nhận gốc tọa độ làm tiêu điểm; Ox làm trục đối xứng; trục tung cắt (P) theo một dây có độ dài bằng 6.

Giải

* Khoảng cách từ tiêu điểm O(0; 0) đến đỉnh của parabol là $\frac{p}{2}$

Do tiêu điểm và đỉnh parabol (P) thuộc đối xứng

Vậy tọa độ đỉnh là:

$S_1(\frac{p}{2}; 0)$ hoặc $S_2(-\frac{p}{2}; 0)$

* Xét parabol có đỉnh là: $S_1(\frac{p}{2}; 0)$

Dời hệ trục tọa độ Oxy về gốc $S_1(\frac{p}{2}; 0)$ bằng cách tịnh tiến theo $\overrightarrow{OS_1}$; thành hệ trục tọa độ S_1XY.

Công thức đổi hệ trục tọa độ là:

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} + X \\ y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - \frac{p}{2} \\ Y = y \end{cases} \quad (*)$$

Trong hệ trục tọa độ S_1XY ta có phương trình của (P) là:

$$Y^2 = -2pX \quad (1)$$

Thay (*) vào (1) ta được phương trình của (P) trong mặt phẳng Oxy là:

$$y^2 = -2p(x - \frac{p}{2})$$

Mà parabol này đi qua A(0; 3) nên ta có:

$$9 = -2p\,(0 - \frac{p}{2})$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad p = 3$$

Vậy phương trình của parabol là:

$$y^2 = -6(x - \frac{3}{2})$$

* Xét parabol có đỉnh là: $S_2(-\frac{p}{2}; 0)$

Dời hệ trục tọa độ Oxy về gốc $S_2(-\frac{p}{2}; 0)$ bằng cách tịnh tiến theo $\overrightarrow{OS_2}$; thành hệ trục tọa độ S_2XY

Công thức đổi hệ trục tọa độ là:

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{2} + X \\ y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \frac{p}{2} \\ Y = y \end{cases} \quad (I)$$

Trong hệ trục tọa độ S_2XY ta có phương trình của (P) là:

$$Y^2 = 2PX \quad (2)$$

Thay (I) vào (2) ta được phương trình của (P) trong hệ trục tọa độ Oxy là:

$$y^2 = 2p(x + \frac{p}{2})$$

Mà parabol này đi qua A(0; 3) nên ta có:

$$9 = 2p\,(0 + \frac{p}{2})$$

$$\Leftrightarrow 9 = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad p = 3$$

Vậy phương trình của parabol là:

$$y^2 = 6(x + \frac{3}{2})$$

Bài 4. Lập phương trình parabol (P) có tiêu điểm $F_1(1; -2)$ và đường chuẩn (Δ) :

$$3x + 4y - 5 = 0$$

Giải

Ta có: $M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow d(M, \Delta) = MF$ với $d(M, \Delta) = \dfrac{|3x + 4y - 5|}{5}$

$$\Leftrightarrow [d(M, \Delta)]^2 = MF^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x + 4y - 5)^2}{25} = (1 - x)^2 + (y + 2)^2$$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 16y^2 + 25 + 24xy - 40y - 30x = 25[(1 - 2x + x^2) + (y^2 + 4y + 4)$

(Vế phải $= 25 - 50x + 25x^2 + 25y^2 + 100y + 100$)

$\Leftrightarrow 16x^2 + 9y^2 - 24xy + 140y - 20x + 100 = 0$

Vậy phương trình parabol (P) là : $16x^2 + 9y^2 - 24xy + 140y - 20x + 100 = 0$

IV. Dạng 4: Phương trình tiếp tuyến của parabol.

Bài 1. Lập phương trình tiếp tuyến của parabol (P): $y^2 = x$ (1) tại giao điểm của (P) với đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 3x - 3 = 0$ (2)

Giải

(P): $y^2 = x$ ($x \geq 0$)

Thay (1) vào (2) ta được phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C):

$x^2 + x - 3x - 3 = 0$ $(x \geq 0) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \text{(loại)} \\ x = 3 & \end{array}\right.$$

Với $x = 3$, từ (1) $\Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Rightarrow M_1(3 ; -\sqrt{3})$; $M_2(3 ; \sqrt{3})$ là các giao điểm của (P) và (C)

* Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M_1(3 ; -\sqrt{3})$ là:

$$y_{M_1}.y = \frac{1}{2}(x_{M_1} + x)$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\,y = \frac{1}{2}(3 + x) \Leftrightarrow x + 2\sqrt{3}\,y + 3 = 0$$

* Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M_2(3 ; -\sqrt{3})$ là:

$$x - 2\sqrt{3}\,y + 3 = 0$$

Bài 2. Lập phương trình tiếp tuyến của Parabol (P): $y^2 = 2x$ biết tiếp tuyến này đi qua M(1; 4).

Giải

Ta có: $2p = 1.2 \Rightarrow p = 1$

Tiếp tuyến(Δ) của (P) qua M(1; 4) có phương trình:

$A(x - 1) + B(y - 4) = 0$; (Với $A^2 + B^2 \neq 0$)

$\Leftrightarrow Ax + By - A - 4B = 0$

Theo điều kiện tiếp xúc ta có:

$B^2.1 = 2A(-A - 4B)$

$\Leftrightarrow 2A^2 + B^2 + 8AB = 0 \Leftrightarrow 2A^2 + 8AB + B^2 = 0$

$(\Delta' = 16B^2 - 2B^2 = 14B^2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{-4B - B\sqrt{14}}{2} = \dfrac{-4 - \sqrt{14}}{2}B \\ A = \dfrac{-4B + B\sqrt{14}}{2} = \dfrac{-4 + \sqrt{14}}{2}B \end{array}\right.$$

*Với $A = \dfrac{-4 - \sqrt{14}}{2}B \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) của (P) qua M(1; 4) là

$\dfrac{-4 - \sqrt{14}}{2}B.(x - 1) + B(y - 4) = 0 \Rightarrow (-4 - \sqrt{14})x + 2y + \sqrt{14} - 4 = 0$

*Với $A = \dfrac{-4 + \sqrt{14}}{2}B \Rightarrow B \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) của (P) qua M(1; 4) là

$\dfrac{-4 + \sqrt{14}}{2}B.(x - 1) + B(y - 4) = 0 \Rightarrow (-4 + \sqrt{14})x + 2y - \sqrt{14} - 4 = 0$

Vậy qua M(1; 4) có hai tiếp tuyến với (P) là :

$(-4 - \sqrt{14})x + 2y + \sqrt{14} - 4 = 0$; $(-4 + \sqrt{14})x + 2y - \sqrt{14} - 4 = 0$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa Oxy cho parabol (P): $y^2 = 16x$. Viết phương trình tiếp tuyến của (P) .

1. Đi qua điểm A(1, 2).
2. Đi qua điểm B(1, −4).
3. Vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 2x - y + 5 = 0$.

Nhận xét: Tiếp tuyến của parabol (P) đi qua $M \in (P)$ trùng với tiếp tuyến của (P) tại $M \in (P)$.

Giải

1. Ta có: (P): $y^2 = 16x$ (phương trình này có dạng: $y^2 = 2px$)

$\Rightarrow 2p = 16 \Rightarrow p = 8$

Đường thẳng qua A và song song Oy không là tiếp tuyến của (P)

Đường thẳng (d) đi qua A(1, 2), có hệ số góc k, phương trình đường thẳng (d) là:

$y = k(x - 1) + 2 \Leftrightarrow kx - y - k + 2 = 0$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của parabol (P), ta có :

$8.(-1)^2 = 2k(2 - k)$

$\Leftrightarrow 8 - 2k(-k + 2) = 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 4 = 0$: phương trình này vô nghiệm

Vậy qua điểm A(1, 2) không thể kẻ được tiếp tuyến tới parabol (P).

Chú ý: *Khi thay tọa độ điểm A vào (P), nhận thấy rằng A thuộc miền trong của (P), suy ra không tồn tại tiếp tuyến của Parabol(P) qua A.*

2. ***Cách 1:*** Nhận xét $B(1, -4) \in (P)$

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) của Parabol(P) tại B có dạng:

$$-4y = 8(x + 1) \Leftrightarrow y = -2x - 2$$

Cách 2: Có thể viết tiếp tuyến của (P) qua B như câu a)

Cách 3 : Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (P) qua B, phương trình đường thẳng (d) có dạng là: $A_1(x - 1) + B_1(y + 4) = 0$. Với $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$

$\Rightarrow A_1x + B_1y + 4B_1 - A_1 = 0$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (P), ta có : $B_1^2 . 8 = 2A_1 . (4B_1 - A_1)$

$\Rightarrow 4.B_1^2 - 4B_1 A_1 + A_1^2 = 0 \Rightarrow (2B_1 - A_1)^2 = 0 \Rightarrow 2B_1 - A_1 = 0$

$\Rightarrow A_1 = 2B_1 \Rightarrow B_1 \neq 0$ (vì $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (P) qua B là :

$2B_1(x - 1) + B_1(y + 4) = 0$. Với $B_1 \neq 0$

$\Rightarrow y = -2x - 2$

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) của parabol (P) tại B là : $y = -2x - 2$

Cách 4: Đường thẳng (d): $A_1x + B_1y + C = 0$ (Với $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$) là tiếp tuyến của parabol (P) $\Rightarrow B_1^2 . 8 = 2A_1 . C$ (1)

Mặt khác ta có $B(1, -4) \in (P) \Rightarrow A_1 - 4B_1 + C = 0$

$\Rightarrow C = 4B_1 - A_1$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có : $B_1^2 . 8 = 2A_1 . (4B_1 - A_1)$

$\Rightarrow 4.B_1^2 - 4B_1 A_1 + A_1^2 = 0 \Rightarrow (2B_1 - A_1)^2 = 0 \Rightarrow 2B_1 - A_1 = 0$

$\Rightarrow A_1 = 2B_1 \Rightarrow B_1 \neq 0$ (vì $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$)

Khi đó, từ (2) ta có : $C = 4B_1 - 2B_1 \Rightarrow C = 2B_1$

$\Rightarrow$ Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (P) qua B là :

$2B_1x + B_1y + 2B_1 = 0$. Với $B_1 \neq 0 \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) của parabol (P) tại B là: $2x + y + 2 = 0$

3. Ta có:

Đường thẳng (d) $\perp$ (Δ), phương trình đường thẳng (d) có dạng là:

$x + 2y + m = 0$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của parabol (P) $\Leftrightarrow 2^2.1 = 2.1.m \Leftrightarrow m = 2$

Vậy phương trình tiếp tuyến (d): $x + 2y + 2 = 0$

V. Dạng 5: Tính chất của parabol

Bài 12. Cho (P): $y^2 = 2px$ và đường thẳng (Δ) lưu động qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm M, N. Chứng minh rằng $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ không đổi và tính FM.FN nhỏ nhất khi (Δ) $\perp$ Ox.

Giải

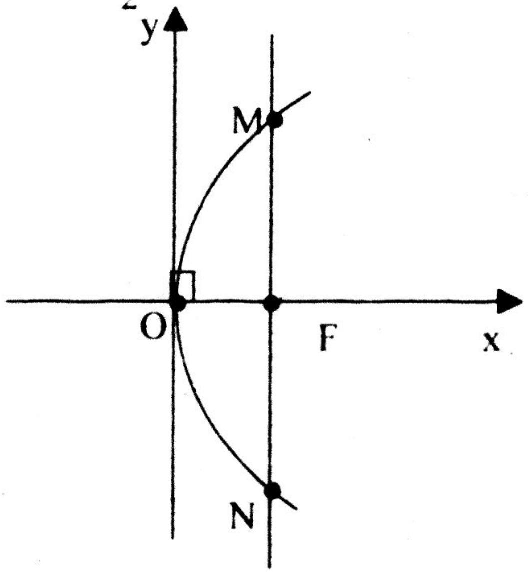
(P): $y^2 = 2px$ (1); có tiêu điểm F ($\frac{p}{2}$; 0)

Trường hợp 1: Đường thẳng (Δ) qua tiêu điểm F ($\frac{p}{2}$;0) và (Δ) song song với trục Oy. Khi đó phương trình (Δ) là: $x = \frac{p}{2} \Rightarrow x_M = x_N = \frac{p}{2}$

(Hoành độ giao điểm M, N của (P) và (Δ))

Khi đó $FM = FN = x_M + \frac{p}{2} = p$

$$\Rightarrow \frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$



Trường hợp 2:

Đường thẳng (Δ) qua F($\frac{p}{2}$; 0); (Δ) không song song Oy; (Δ) cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N nên phương trình đường thẳng (Δ) có dạng.

$y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Đường thẳng (Δ) qua F($\frac{p}{2}$; 0) $\Rightarrow 0 = \frac{ap}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{ap}{2}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng (Δ) là: $y = ax - \dfrac{ap}{2}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được $\left(ax - \dfrac{ap}{2}\right)^2 = 2px$ (phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (Δ).

$$\Rightarrow a^2x^2 - p(a^2+2)x + \frac{a^2p^2}{4} = 0 \quad (*)$$

Ta có $\Delta = p^2(a^2+2)^2 - 4.a^2.\dfrac{a^2.p^2}{4} = 4p^2a^2 + 4p^2 > 0;$ $(\forall a \neq 0; \forall p > 0)$

Vậy phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_M ; x_N

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M + x_N = \dfrac{p(a^2+2)}{a^2} = p + \dfrac{2p}{a^2} \\ x_M.x_N = \dfrac{\dfrac{a^2p^2}{4}}{a^2} = \dfrac{p^2}{4} \end{cases}$$

Ta có: $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN} = \dfrac{1}{x_M + \dfrac{p}{2}} + \dfrac{1}{x_N + \dfrac{p}{2}}$

$$= \frac{(x_M + x_N) + p}{x_M.x_N + \dfrac{p}{2}(x_M + x_N) + \dfrac{p^2}{4}}$$

$$= \frac{(p + \dfrac{2p}{a^2}) + p}{\dfrac{p^2}{4} + \dfrac{p}{2}.(p + \dfrac{2p}{a^2}) + \dfrac{p^2}{4}} = \frac{2p(1 + \dfrac{1}{a^2})}{p^2(1 + \dfrac{1}{a^2})} = \frac{2}{p} \quad \text{(không đổi)}$$

Vậy (Δ) lưu động luôn qua tiêu điểm F của (P); ta có:

$\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN} = \dfrac{2}{p}$ (p tham số tiêu)

Ta có: $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN} \geq 2.\dfrac{1}{\sqrt{FM.FN}}$ (Bất đẳng thức Côsi)

$$\Rightarrow \frac{2}{p} \geq \frac{2}{\sqrt{FM.FN}} \Rightarrow \sqrt{FM.FN} \geq p \quad \Rightarrow FM.FN \geq p^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ FM = FN $\Leftrightarrow x_M + \frac{p}{2} = x_N + \frac{p}{2} \Leftrightarrow x_M = x_N \Leftrightarrow (\Delta) \perp Ox$

Vậy FM.FN đạt giá trị nhỏ nhất bằng p^2 khi $(\Delta) \perp Ox$.

Bài 13. Cho (P): $y^2 = 8x$. Tìm tung độ điểm M, biết từ M kẻ được hai tiếp tuyến với (P) có hệ số góc lần lượt bằng 3 và $-\frac{1}{3}$.

Giải

* Phương trình đường thẳng (Δ) có hệ số góc bằng 3 là: $y = 3x + b$

$$\Leftrightarrow 3x - y + b = 0$$

Hai tiếp tuyến có tích hai hệ số góc bằng -1

$\Rightarrow$ Hai tiếp tuyến trên vuông góc nhau.

Từ M kẻ hai tiếp tuyến của (P) vuông góc nhau.

$\Rightarrow M(x_M ; y_M)$ thuộc đường chuẩn của (P)

Mặt khác ta có phương trình đường chuẩn của (P) là : $x = -2 \quad \Rightarrow x_M = -2$

Theo điều kiện tiếp xúc của (Δ) và (P), ta có:

$PB^2 = 2AC$ (với $p = 4$; $A = 3$; $B = -1$; $C = b$)

$\Leftrightarrow 4.(-1)^2 = 2.3.b$

$\Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Phương trình (Δ) $\Rightarrow 3x - y + \frac{2}{3} = 0$

Ta có $M(x_M ; y_M) \in (\Delta)$

$\Rightarrow 3x_M - y_M + \frac{2}{3} = 0$

$\Rightarrow 3(-2) + \frac{2}{3} = y_M$

$\Rightarrow -\frac{16}{3} = y_M$

Vậy tung độ điểm M là: $y_M = -\frac{16}{3}$.

Bài 14: Cho parabol (P): $y^2 = 2px$ và điểm M chạy trên đường thẳng (d) cố định, không cắt (P) đã cho. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1; MT_2 tới (E), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

1. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 theo tọa độ của M.
2. Chứng minh rằng khi đó các đường thẳng T_1 T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

1. Gọi $T_1(x_1; y_1)$, $T_2(x_2; y_2)$ là các tiếp điểm thỏa mãn bài toán, ta có:

- Phương trình tiếp tuyến với parabol (P) tại $T_1(x_1; y_1)$, có dạng: $yy_1 = p(x + x_1)$
- Phương trình tiếp tuyến với parabol (P) tại $T_2(x_2; y_2)$, có dạng: $yy_2 = p(x + x_2)$
- Các tiếp tuyến trên đi qua điểm $M(x_0, y_0)$, ta có:

$$y_0y_1 = p(x_0 + x_1) \text{ và } y_0y_2 = p(x_0 + x_2)$$

$\Rightarrow T_1(x_1; y_1), T_2(x_2; y_2)$ thuộc đường thẳng có phương trình $yy_0 = p(x + x_0)$

vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 là: $yy_0 = p(x + x_0)$ (I)

2. Giả sử phương trình (d): $Ax + By + C = 0$, điều kiện $A^2 + B^2 \neq 0$

Điểm $M(x_0, y_0) \in (d) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0$ (II) $\Leftrightarrow By_0 = -Ax_0 - C$

Trường hợp 1: $B \neq 0$

Khi đó, ta có (I) $\Leftrightarrow By_0y = pB(x + x_0)$

$\Leftrightarrow (-Ax_0 - C)y = pB(x + x_0)$

$\Leftrightarrow pBx + (Ax_0 + C)y + pBx_0 = 0$

Gọi N(x; y) là điểm cố định của đường thẳng T_1T_2

Khi đó phương trình $pBx + (Ax_0 + C)y + pBx_0 = 0$ nghiệm đúng với mọi x_0

$\Leftrightarrow (Ay + pB)x_0 + pBx + Cy = 0, \ \forall x_0 \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ay + pB = 0 \\ pBx + Cy = 0 \end{cases} (*) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{C}{A} \\ y = -\dfrac{pB}{A} \end{cases} \quad (A = 0 \text{ không thỏa } (*))$$

Vậy đường thẳng T_1T_2 đi qua điểm cố định $N\left(\frac{C}{A}; -\frac{pB}{A}\right)$

Trường hợp 2: $B = 0 \Rightarrow A \neq 0$ (vì $A^2 + B^2 \neq 0$)

Khi đó phương trình (II) $\Leftrightarrow x_0 = \dfrac{-C}{A}$

Ta có (I) $\Leftrightarrow yy_0 = p\left(x + \dfrac{-C}{A}\right)$ (phương trình đường thẳng T_1T_2)

Gọi N(x; y) là điểm cố định của đường thẳng T_1T_2

Khi đó phương trình $yy_0 = p\left(x + \dfrac{-C}{A}\right)$ nghiệm đúng với mọi y_0

$$\Leftrightarrow \quad y y_0 - p(x + \frac{-C}{A}) = 0, \ \forall \ y_0 \in R$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_0 = 0 \\ -p(x + \frac{-C}{A}) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{C}{A} \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng T_1T_2 đi qua điểm cố định $N(\frac{C}{A};\ 0) \equiv N(\frac{C}{A};\ -\frac{pB}{A})$ (Với B = 0)

Vậy đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định $N(\frac{C}{A};\ -\frac{pB}{A})$

Bài 15: Cho parabol (P): $(y - 1)^2 = 2(x - 1)$ và đường thẳng (d) $x - y + 1 = 0$. Từ M thuộc (d) kẻ hai tiếp tuyến MT_1; MT_2 tới (P), trong đó T_1; T_2 là các tiếp điểm. Chứng minh rằng khi đó đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Parabol (P): $(y - 1)^2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = (x + x) - 2$

Phương trình tham số của đường thẳng (d) là: (d): $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \end{cases} \quad (t \in R)$

Khi đó $M \in (d) \Rightarrow M(t - 1, t)$ và giả sử $T_1(x_1; y_1)$, $T_2(x_2; y_2)$ là các tiếp điểm thỏa mãn bài toán, ta có:

+) Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $T_1(x_1; y_1)$ là:

$$(y - 1)(y_1 - 1) = x + x_1 - 2$$

+) Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $T_2(x_2; y_2)$ là:

$$(y - 1)(y_2 - 1) = x + x_2 - 2$$

- Các tiếp tuyến trên đi qua điểm M, ta có:

$(t - 1)(y_1 - 1) = t - 1 + x_1 - 2$ (1) và $(t - 1)(y_2 - 1) = t - 1 + x_2 - 2$ (2)

$\Rightarrow T_1(x_1; y_1)$, $T_2(x_2; y_2)$ thuộc đường thẳng có phương trình:

$(t - 1)(y - 1) = t - 1 + x - 2 \Rightarrow x - (t - 1)y + 2t - 4 = 0$

vậy phương trình T_1T_2 có dạng: $x - (t - 1)y + 2t - 4 = 0$

Gọi N(x; y) là điểm cố định của đường thẳng T_1T_2 khi đó:

Ta có $x - (t - 1)y + 2t = 0, \ \forall t \in R$

$$\Leftrightarrow (2 - y)t + x + y - 4 = 0 \quad \forall t \in R$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định N(2, 2)

Bài 16. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$ và parabol (P): $y^2 = 2px$ $(0 < p)$. Từ điểm $M \in (C)$, kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 với (P), trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm.

1. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 theo tọa độ của M.

2. Chứng minh rằng khi đó đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một hypebol (H) cố định.

Giải

1. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2:

Ta có $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = R^2 \Rightarrow \left(\frac{x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{R}\right)^2 = 1$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{x_0}{R} = \sin t \\ \dfrac{y_0}{R} = \cos t \end{cases} ; t \in [0; 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = R\sin t \\ y_0 = R\cos t \end{cases} ; t \in [0; 2\pi)$

$\Rightarrow M(R\sin t; R\cos t)$

Xét các tiếp điểm $T_1(x_1; y_1)$, $T_2(x_2; y_2)$ ta có:

+ Phương trình tiếp tuyến với parabol (P) tại $T_1(x_1; y_1)$, có dạng: $yy_1 = p(x + x_1)$

+ Phương trình tiếp tuyến với parabol (P) tại $T_2(x_2; y_2)$ có dạng: $yy_2 = p(x + x_2)$

Các tiếp tuyến trên đi qua điểm $M(x_0, x_0)$, nên ta có: $y_0y_1 = p(x_0 + x_1)$ (1)

và $y_0y_2 = p(x_0 + x_2)$ (2)

Do đó $T_1(x_1; y_1)$, $T_2(x_2; y_2)$ cùng thuộc đường thẳng có phương trình:

$$y_0y = p(x_0 + x)$$

Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 có dạng:

$yy_0 = p(x + x_0) \Leftrightarrow y.R\cos t = p(x + R\sin t)$

$\Leftrightarrow px - (R\cos t)y + p(R\sin t) = 0$

(phương trình này có dạng $Ax+By+C=0$)

2. Ta có: $p^2(R\cos t)^2 + p^2(R\sin t)^2 = R^2p^2$ (vì $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1\ \forall t \in \mathbf{R}$)

$\Rightarrow R^2.p^2 - p^2.(R\cos t)^2 = p^2(R\sin t)^2$

(Hệ thức này có dạng $a^2.A^2 - b^2.B^2 = C^2$ với $a^2 = R^2$; $b^2 = p^2$)

Vậy đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với hypebol (H) cố định có phương trình là:

$$\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1$$

***Chú ý:** Phương pháp trong bài 5 cũng được mở rộng tự nhiên khi thay (C) bằng một Elip (E).*

Bài 17. Cho (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và parabol (P): $y^2=2px$.

Từ $M\in(E)$ kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 với (P) (với T_1, T_2 là các tiếp điểm).

1. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 theo tọa độ của M.

2. Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với một hypebol cố định.

Giải

1. Viết phương trình đường thẳng T_1T_2

Ta có $M(x_0;y_0)\in(E)$: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1 \quad \Rightarrow \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{1}=1$

Đặt : $\begin{cases}\frac{x_0}{2}=\sin t\\ \frac{y_0}{1}=\cos t\end{cases}$; $t\in[0;2\pi) \Rightarrow \begin{cases}x=2\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$; $t\in[0;2\pi)$

$\Rightarrow M(2\sin t;\cos t)$

Xét các tiếp điểm $T_1(x_1;y_1)$, $T_2(x_2;y_2)$ ta có:

+ Phương trình tiếp tuyến với parabol (P) tại $T_1(x_1;y_1)$, có dạng: $yy_1=p(x+x_1)$

+ Phương trình tiếp tuyến với parabol (P) tại $T_2(x_2;y_2)$, có dạng: $yy_2=p(x+x_2)$

Các tiếp tuyến trên đi qua điểm $M(x_0,x_0)$, nên ta có: $y_0y_1=p(x_0+x_1)\ (1)$

và $y_0y_2=p(x_0+x_2)\ (2)$

Do đó $T_1(x_1;y_1)$, $T_2(x_2;y_2)$ cùng thuộc đường thẳng có phương trình:

$y_0y=p(x_0+x)$

Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 có dạng:

$yy_0=p(x+x_0)\Leftrightarrow y.\cos t=p(x+2\sin t)\Leftrightarrow px-(\cos t)y+p(2\sin t)=0$

(phương trình này có dạng $Ax+By+C=0$)

2. Ta có : $4p^2(\cos t)^2+p^2(2\sin t)^2=4p^2;\forall t\in\mathbf{R}$

(vì $(\cos t)^2+(\sin t)^2=1\ \forall t\in\mathbf{R}$) $\Rightarrow 2^2.p^2-(2p)^2.(\cos t)^2=p^2(2\sin t)^2$

(Hệ thức này có dạng $a^2.A^2-b^2.B^2=C^2$ với $a^2=2^2$; $b^2=(2p)^2$)

Vậy đường thẳng T_1T_2 luôn tiếp xúc với hypebol (H) cố định có phương trình là :

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(2p)^2}=1$$

Chương II

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Vấn đề I

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM

A. Ghi nhớ : **Tọa độ của vectơ và của điểm** :

I. Tọa độ vectơ :

1. ***Định nghĩa*** : Trong không gian *với hệ tọa độ Oxyz*

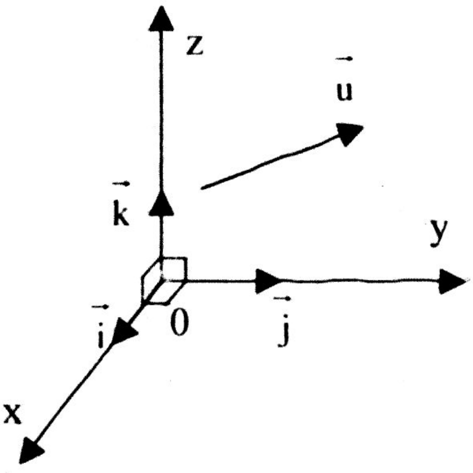
$\vec{u} = (x;y;z) \Leftrightarrow \quad \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

* *Hệ quả :* $\vec{i} = (1;0;0)$; $\vec{j} = (0;1;0)$; $\vec{k} = (0;0;1)$; $\vec{0} = (0;0;0)$

2. Tính chất :

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz *cho* $\vec{u} = (x;y;z)$, $\vec{v} = (x';y';z')$

Ta có các công thức sau:



a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

b) $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x';y \pm y';z \pm z')$

c) $k\vec{u} = (kx;ky;kz)$, *với* $k \in R$

d) Tích vô hướng của hai vectơ

$+\ \vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

$\overrightarrow{u^2} = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$+ \cos(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\ \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|}$

$+\ \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z' = 0$

3. Tích có hướng của hai vectơ:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$.

* *Định nghĩa* : $[\vec{a},\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

* *Tính chất:*

a) $[\vec{a},\vec{b}] \perp \vec{a}$; $[\vec{a},\vec{b}] \perp \vec{b}$

b) $\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b}$; $(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \exists t \in R$ *sao cho* $\vec{a} = t.\vec{b}$

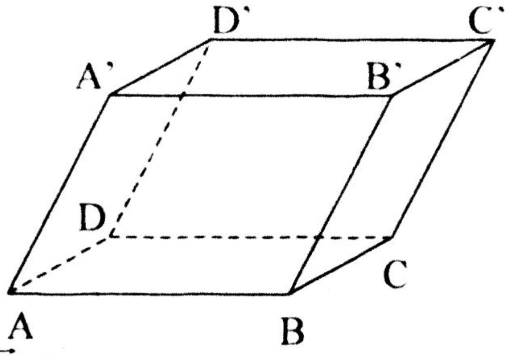
c) $\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

d) $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ *đồng phẳng* $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}]\,\vec{c} = 0$

Hệ quả : A,B,C,D không đồng phẳng (tức A,B,C,D là bốn đỉnh của tứ diện)

$\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\,\overrightarrow{AD} \neq 0$

e) $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |[\vec{a}]| \cdot |[\vec{b}]| \sin(\vec{a}; \vec{b})$



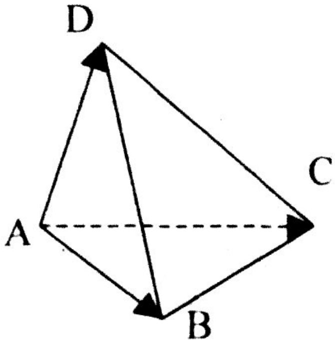
Hệ quả : + Diện tích ΔABC *là* $S = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$

+ Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D' là:

$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\,AA'|$

+ Thể tích khối tứ diện ABCD là :

$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\,\overrightarrow{AD}|$



II. Tọa độ của điểm :

1. Định nghĩa : $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

2. Tính chất : *Cho* $A(x_A; \quad z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ *khi đó ta có :*

a. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

b. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

c. Nếu M chia đoạn AB theo tỷ số $k \neq 1$ *(tức là* $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$*) thì tọa độ của M là:*

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}, (k \neq 1) \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$$

Hệ quả : + Điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB, ta có :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

+ Trọng tâm G của ΔABC có tọa độ là: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$

Chú ý:

1. + M $\in$ 0x $\Leftrightarrow$ M(x;0;0)
   + M $\in$ 0y $\Leftrightarrow$ M(0;y;0)
   + M $\in$ 0z $\Leftrightarrow$ M(0;0;z)
2. + M $\in$ mặt phẳng (Oxy) $\Leftrightarrow$ M(x;y;0)
   + M $\in$ mặt phẳng (Oyz) $\Leftrightarrow$ M(0;y;z)
   + M $\in$ mặt phẳng (Oxz) $\Leftrightarrow$ M(x;0;z)
3. A' đối xứng với $A(x_A;y_A\ z_A)$ qua mặt phẳng (Oxy) $\Leftrightarrow$ $A'(x_A;y_A; -z_A)$
   A' đối xứng với A $(x_A;y_A\ z_A)$ qua mặt phẳng (Oyz) $\Leftrightarrow$ $A'(-x_A;y_A;z_A)$
   A' đối xứng với $A(x_A;y_A\ z_A)$ qua mặt phẳng (Oxz) $\Leftrightarrow$ $A'(x_A; -y_A;z_A)$
4. A' đối xứng với A qua trục Ox $\Leftrightarrow$ $A'(x_A; -y_A; -z_A)$
   A' đối xứng với A qua trục Oy $\Leftrightarrow$ $A'(-x_A; y_A; -z_A)$
   A' đối xứng với A qua trục Oz $\Leftrightarrow$ $A'(-x_A; -y_A; z_A)$
5. Ta có $\begin{cases} \overline{AB} \perp \left[\overline{AB}.\overline{AC}\right] \\ \overline{AC} \perp \left[\overline{AB}.\overline{AC}\right] \end{cases}$

   Nếu $\overline{SA} \perp (ABC)$ thì $\overline{SA}$ cùng phương với $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]$
6. Điểm A' đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O(0; 0; 0) $\Leftrightarrow$ $A'(-x_A; -y_A\ -z_A)$
7. A' là hình chiếu vuông của A trên mặt phẳng (Oxy) $\Leftrightarrow$ $A'(x_A; y_A; 0)$
   A' là hình chiếu vuông của A trên mặt phẳng (Oyz) $\Leftrightarrow$ $A'(0; y_A; z_A)$
   A' là hình chiếu vuông của A trên mặt phẳng (Oxz) $\Leftrightarrow$ $A'(x_A; 0; z_A)$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN:

I. Dạng I: Tìm điểm; vectơ thỏa điều kiện cho trước

Bài1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD; A(1; 2; −1); B(5; 0; 3); C(7; 2; 2). SA $\perp$ (ABC); S $\in$ mp(Oyz)

1. Tính tọa độ điểm S.
2. Xác định tọa độ giao điểm của Ox với mp(ABC)
3. Xác định tọa độ giao điểm của Oy với mp(ABC)

Giải

1. Ta có S $\in$ mp(Oyz) $\Leftrightarrow$ S(0; y; z)

Ta có: $\begin{cases} \overline{AB} = (4; -2; 4) \\ \overline{AC} = (6; 0; 3) \end{cases} \Rightarrow \left[\overline{AB},\overline{AC}\right] = (-6; 12; 12)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \\ \overrightarrow{AC} \perp \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AS}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-6; 12; 12)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{y-2}{12} = \dfrac{z+1}{12}$ vì $\overrightarrow{AS} = (-1; y-2; z+1)$

$\Rightarrow \begin{cases} y - 2 = 2 \\ z + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

Vậy S(0; 4; 1)

2. Gọi E = Ox ∩ (ABC)

Ta có E ∈ Ox ⇔ E(x; 0; 0)

Ta có E ∈ (ABC) ⇔ $\overrightarrow{AE}.\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$

$\Leftrightarrow -6(x-1) - 24 + 12 = 0$ vì $\begin{cases} \overrightarrow{AE} = (x-1; -2; 1) \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-6; 12; 12) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -1$

Vậy E(-1; 0; 0)

3. Gọi F = Oy ∩ (ABC)

Ta có F ∈ Oy ⇔ F(0; y; 0)

Ta có F ∈ (ABC) ⇔ $\overrightarrow{AF}.\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$

$\Leftrightarrow 6 + 12(y-2) + 12 = 0$ vì $\begin{cases} \overrightarrow{AF} = (-1; y-2; 1) \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-6; 12; 12) \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}$

Vậy F(0; $\dfrac{1}{2}$; 0)

Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(1; 2; –1)

1. Tìm B đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy).
   Tìm C đối xứng với A qua trục Oz.
2. Tính diện tích ΔABC.

Giải

1. Ta có B đối xứng với A(1; 2; –1) qua mp (Oxy) ⇔ B(1; 2; 1)

Ta có C đối xứng với A(1; 2; –1) qua trục Oz ⇔ C(–1; –2; –1)

2. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0; 0; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2; -4; 0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8; -4; 0)$

Do đó diện tích ΔABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 4^2 + 0^2} = 2\sqrt{5}$$

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho $\vec{u} = (6; -8; -\frac{15}{2})$. Tìm vectơ $\vec{a}$ biết $|\vec{a}| = 50$; $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{u}$ và vectơ $\vec{a}$ tạo với $\vec{k}$ một góc nhọn?

Giải

Ta có: $\vec{a}$, $\vec{u}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} = t.\vec{u}$ $(t \neq 0$ vì $|\vec{a}| = 50 \neq 0)$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = |t|.|\vec{u}| \quad \text{với } |\vec{u}| = \sqrt{36 + 64 + \frac{225}{4}} = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow 50 = \frac{25}{2}|t| \Rightarrow |t| = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -4 \end{array}\right. (*)$$

Mặt khác $\vec{a}$ tạo với $\vec{k}$ (0; 0; 1) một góc nhọn

$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{k}) > 0$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{k} > 0$

Mà $\vec{a} = (6t\,; -8t\,; -\frac{15}{2}t\,)$

Do đó từ (*) $\Rightarrow t = -4$

Khi đó: $\vec{a} = (-24; 32; 30)$

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(1; 2; −1); B(4; 3; 5) Xác định $M \in Ox$ sao cho M cách đều A, B?

Giải

Ta có $M \in Ox \Leftrightarrow M(x; 0; 0)$

Cách 1: $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + 4 + 1 = (4 - x)^2 + 9 + 25$

$\Leftrightarrow 6x = 44 \Leftrightarrow x = \frac{22}{3}$

Vậy $M(\frac{22}{3}; 0; 0)$

Cách 2: Gọi H trung điểm AB $\Rightarrow H(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 2)$

Ta có MA = MB

$$\Rightarrow \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{với} \begin{cases} \overrightarrow{MH} = (\frac{5}{2} - x; \frac{5}{2}; 2) \\ \overrightarrow{AB} = (3; 1; 6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AB} = \frac{15}{2} - 3x + \frac{5}{2} + 12 = 0 \Rightarrow -3x + 22 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{22}{3}$$

Vậy $M(\frac{22}{3};0;0)$

Chú ý: *Tìm các điểm đặc biệt trong tam giác (Trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp)*

Bài 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(1; −2; −1); B(−5; 10; −1); C(4; 1; 1)

1. Chứng minh: A; B; C không thẳng hàng.
2. Tìm tọa độ trực tâm ΔABC.
3. Tìm tọa độ trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giải

1. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-6;12;0) \\ \overrightarrow{AC} = (3;3;2) \end{cases}$

Ta có $-\frac{6}{3} \neq \frac{12}{3}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Do đó A; B; C không thẳng hàng:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (24;12;-54) \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Rightarrow$ A; B; C không thẳng hàng.

2. Gọi H(x; y ; z) là trực tâm của ΔABC

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \\ \overrightarrow{AH}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-6;12;0) \\ \overrightarrow{CH} = (x-4;y-1;z-1) \\ \overrightarrow{AC} = (3;3;2) \\ \overrightarrow{BH} = (x+5;y-10;z+1) \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (24;12;-54) \\ \overrightarrow{AH} = (x-1;y+2;z+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = -6(x-4) + 12(y-1) = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB} = 3(x+5) + 3(y-10) + 2(z+1) = 0 \\ 24(x-1) + 12(y+2) - 54(z+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 & (1) \\ 3x + 3y + 2z - 13 = 0 & (2) \\ 4x + 2y - 9z - 9 = 0 & (3) \end{cases}$$

Vì (1) $\Leftrightarrow x = 2y + 2$ (4)

Thay (4) vào (2); (3) ta được:

$$\begin{cases} 9y+2z-7=0 \\ 10y-9z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{-65}{-101}=\dfrac{65}{101} \\ z=\dfrac{-61}{-101}=\dfrac{61}{101} \end{cases}$$

Do đó, ta có : $\begin{cases} x=\dfrac{332}{101} \\ y=\dfrac{65}{101} \\ z=\dfrac{61}{101} \end{cases}$

Vậy $H(\frac{332}{101};\frac{65}{101};\frac{61}{101})$

3. Gọi G là trọng tâm ΔABC; ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)=\dfrac{1}{3}(1-5+4)=0 \\ y_G=\dfrac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)=\dfrac{1}{3}(-2+10+1)=3 \\ z_G=\dfrac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)=\dfrac{1}{3}(-1+(-1)+1)=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad G(0;3;-\frac{1}{3})$$

* Gọi I(a; b; c) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Cách 1:

Ta có $\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \\ \overrightarrow{AI}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=0 \end{cases}$

$\Rightarrow I(17,604\ ;\ 13,802\ ;\ 9,89109)$

Cách 2:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BC, AB

$$\Rightarrow \begin{cases} M(-\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2};0) \\ N(-2;4;-1) \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{IN} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AI}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0 \end{cases}$ với $\begin{cases} \overrightarrow{IM} = (-\frac{1}{2} - a; \frac{11}{2} - b; -c) \\ \overrightarrow{BC} = (9; -9; 2) \\ \overrightarrow{IN} = (-2 - a; 4 - b; -1 - c) \\ \overrightarrow{AB} = (-6; 12; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (3; 3; 2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BC} = 9(-\frac{1}{2} - a) - 9(\frac{11}{2} - b) - 2c = 0 \\ \overrightarrow{IN}.\overrightarrow{AB} = -6(-2 - a) + 12(4 - b) = 0 \\ 24(a - 1) + 12(b + 2) - 54(c + 1) = 0 \end{cases}$ vì $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = (a - 1; b + 2; c + 1) \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (24; 12; -54) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 9b + 2c - 54 = 0 \\ a - 2b + 10 = 0 \\ 4a + 2b - 9c - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 17,604 \\ b = 13,802 \\ c = 9,89109 \end{cases}$

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(– 4; – 1; 2); B(3; 5; – 1). Tìm C biết trung điểm đoạn AC thuộc trục tung Oy; trung điểm đoạn BC thuộc mặt phẳng (Oxz).

Giải

Gọi ($x_C; y_C; z_C$) là tọa độ điểm C

Gọi H, K lần lượt là trung điểm đoạn AC; BC

Ta có: $\begin{cases} H \in 0y \\ K \in (0xz) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H(0; y_H; 0) \\ K(x_K; 0; z_K) \end{cases}$

Mà $\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = 0 \text{ (vì } x_H = 0) \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = y_K = 0 \\ \dfrac{z_A + z_C}{2} = z_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = x_A = 4 \\ y_C = -y_B = -5 \\ z_C = -z_A = -2 \end{cases}$

Vậy C(4; -5; -2)

Bài 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(– 1; 2; 7); B(5; 4; – 2)
1. Đường thẳng AB cắt mp (Oxy) tại M. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào?
2. Tính tọa độ điểm M?

Giải

1. Ta có $M = AB \cap (Oxy)$

$\Rightarrow M \in (Oxy) \Rightarrow M(a;\ b;\ 0)$

Ta có A không trùng B ,M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB},\ k \neq 1.\ \text{Với}\ \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-1-a;2-b;7) \\ \overrightarrow{MB} = (5-a;4-b;-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1-a = k(5-a) \\ (2-b) = k(4-b) \\ 7 = k(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-a = -\dfrac{7}{2}(5-a) \\ (2-b) = -\dfrac{7}{2}(4-b) \\ k = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{33}{9} \\ b = \dfrac{32}{9} \\ k = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy M chia đoạn thẳng AB theo tỉ lệ $k = -\dfrac{7}{2}$

2. Tọa độ điểm $M(\dfrac{33}{9};\dfrac{32}{9};0)$

Bài 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho $\vec{a}(3;2;2)$; $\vec{b}(18;-22;-5)$ Tìm $\vec{c}$ thoả $\left|\vec{c}\right| = 14$; $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$; $\vec{c}$ tạo với $\vec{k}(0;0;1)$ một góc tù.

Giải

Gọi (x; y; z) là tọa độ của vectơ $\vec{c}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \left|\vec{c}\right| = 14 \\ \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14^2 & (1) \\ 18x - 22y - 5z = 0 & (2) \\ 3x + 2y + 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2) và (3): } \begin{cases} 18x - 22y - 5z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{34z}{102} = -\dfrac{1}{3}z \\ y = -\dfrac{51z}{102} = -\dfrac{z}{2} \end{cases}$$

Khi đó từ (1) ta có:

$$\frac{z^2}{9} + \frac{z^2}{4} + z^2 = 196$$

$$\Leftrightarrow 36z^2 + 4z^2 + 9z^2 = 36.196$$

$$\Leftrightarrow 49z^2 = 36.196$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\frac{6.14}{7} = \pm 12 \qquad (*)$$

Mặt khác, ta có: $\vec{c}$ tạo với $\vec{k}$ một góc tù

$\Leftrightarrow \cos(\vec{c};\vec{k}) < 0 \quad \Leftrightarrow \vec{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \vec{c}.\vec{k} < 0$.

Với $\begin{cases} \vec{c} = (x;y;z) \\ \vec{k} = (0;0;1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow z.1 < 0$

$\Leftrightarrow z < 0$

Từ (*) $\Rightarrow z = -12$

Vậy $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \\ z = -12 \end{cases}$

Do đó $\vec{c} = (4;6;-12)$

Vấn đề II

MẶT PHẲNG

A .GHI NHỚ

I. Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \text{ (Với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

Khi đó: $\vec{n} = (A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng trên.

II. Chú ý:

1. Phương trình mặt phẳng (α) qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A;B;C)$ là:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \quad \text{(Với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

2. Phương trình mặt phẳng song song hoặc chứa một trục tọa độ

+ Mặt phẳng song song hoặc chứa Ox có phương trình là:

$By + Cz + D = 0.$

+ Mặt phẳng song song hoặc chứa Oy có phương trình là :

$Ax + Cz + D = 0.$

+ Mặt phẳng song song hoặc chứa Oz có phương trình là :

$Ax + By + D = 0.$

3. Mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy)có phương trình là :

$Cz + D = 0$

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$

Mặt phẳng song song mặt phẳng (Oyz) có phương trình $Ax + D = 0$

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x = 0$

Mặt phẳng song song mặt phẳng (Oxz) có phương trình $By + D = 0$

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$

4. Phương trình mặt phẳng qua A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c).

(Với $a.b.c \neq 0$) là : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

III. Vị trí đường thẳng của mặt phẳng.

Cho $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

Cho $(\beta) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

1. (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow A : B : C \neq A_1 : B_1 : C_1$

2. $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{C}{C_1} \neq \dfrac{D}{D_1}$

3. $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow A : B : C : D = A_1 : B_1 : C_1 : D_1$

IV. Phương trình của chùm mặt phẳng:

Mỗi mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng

(α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (β): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

có phương trình dạng:

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \text{ (Với } \lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$$

V. Lưu ý:

* Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}; \vec{b} \neq \vec{0}$; $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương ($\vec{a}, \vec{b}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α)) thì: $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một vectơ pháp tuyến (α).

* Đặc biệt: mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Dạng I: Viết phương trình mặt phẳng qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

* ***Phương pháp:***

+ Tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$

+ Mặt phẳng (ABC) qua A (hoặc B, hoặc C) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (ABC). (theo chú ý 1)

2. Dạng II:

Viết phương trình mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và (α) ⊥ đường thẳng (Δ)

* ***Phương pháp:***

+ Tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u}$

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ là một vectơ pháp tuyến của (α)

$\Rightarrow$ phương trình (α) theo (1)

Đặc biệt: Phương trình mặt trung trực của đoạn thẳng AB.

* ***Phương pháp:***

+ Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.

+ Vectơ $\overrightarrow{AB}$ là một vectơ pháp tuyến của (α)

$\Rightarrow$ Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB theo (1)

3. Dạng III: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng là giao tuyến của (β); (θ) và thỏa điều kiện cho trước (điều kiện cho trước có thể là: mặt phẳng (α) qua một điểm; vuông góc mặt phẳng khác ...).

* ***Phương pháp:***

+ Viết phương trình mặt phẳng (α) dưới dạng phương trình chùm mặt phẳng Dựa theo điều kiện cho trước ban đầu $\Rightarrow \lambda, \mu$

$\Rightarrow$ phương trình (α).

* ***Đặc biệt:*** mặt phẳng (α) qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và chứa trục tọa độ.

Phương pháp:

+ Gọi vectơ $\vec{e}$ là vectơ đơn vị của trục tọa độ đang xét

+ Tìm vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ của (α)

Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = [\,\overrightarrow{OM_0}\,,\ \vec{e}\,\,]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) theo chú ý 1

Bài 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz viết phương trình mặt phẳng qua A (1; 1; 0); O(0;0); B(0; 0; 2)

Giải

Cách 1: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA} = (1;1;0)\\ \overrightarrow{OB} = (0;0;2)\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (2;\ -2;\ 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AOB)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (AOB) là :

$2.(x - 0) - 2(y - 0) + 0.(z - 0) = 0 \Rightarrow x\ -\ y = 0$

Cách 2: Ta có M(x; y; z) $\Rightarrow\ \overrightarrow{OM} = (x;\ y;\ z)$

M(x; y; z) $\in$ (AOB) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow\ \left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OM}\right| = 0$ (*). Mà $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (2;\ -2\ ;\ 0)$

Và $\overrightarrow{OM} = (x;\ y;\ z)$

$\Leftrightarrow\ 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow\ x - y = 0$

Vậy phương trình mặt phẳng qua A; O; B là: $x - y = 0$

Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz .Viết phương trình mặt phẳng (α) qua M_0 (1; 2; 3) và chứa trục Ox.

Giải

Ta có $\begin{cases}\vec{i} = (1;0;0)\\ \overrightarrow{OM_0} = (1;2;3)\end{cases}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{n_\alpha}\ =\ [\ \vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OM_0}\ ] = (0;\ -3;\ 2)$ là một vectơ pháp tuyến của (α)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) là :

$0(x - 0) - 3\ (y - 0) + 2(z - 0) = 0$ vì O (0; 0; 0) $\in$ (α)

$\Rightarrow\ -3y\ +\ 2z = 0$

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(0; 1; 2), B(2; 3; 1); C(2; 2; –1)

1. Viết phương trình mặt phẳng qua A; B; C.
2. Chứng tỏ gốc tọa thuộc mặt phẳng (ABC).
3. Chứng minh tứ giác OABC là một hình chữ nhật.
4. Tính thể tích khối chóp S.OABC với S(9;0;0)
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB và trung điểm đoạn OS

**** Chú ý:*** + $V_{S.ABC} = V_{S.OAC}\ \Rightarrow V_{S.OABC} = 2V_{S.ABC}$

+ Đường cao hình chóp S.OABC bằng đường cao hình chóp S.ABC

Giải

1. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2;-1) \\ \overrightarrow{AC} = (2;1;-3) \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-5;\ 4;\ -2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (ABC) là :

$-5.(x-0) + 4.(y-1) + (-2)(z-2) = 0 \Rightarrow -5x + 4y - 2z = 0$

Vậy phương trình mặt phẳng qua A ;B; C là : $-5x + 4y - 2z = 0$

2. Ta có $-5.0 + 4.0 - 2.0 = 0 \quad \Rightarrow O\,(0;0;0) \in (ABC)$

3. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2;-1) \\ \overrightarrow{OC} = (2;2;-1) \\ \overrightarrow{OA} = (0;1;2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = OC \\ AB // OC \\ AB \perp AO \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác OABC là một hình chữ nhật.

4. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (OABC)

Khi đó thể tích của hình chóp S.OABC là :

$$V = V_{S.OABC} = \frac{1}{3}.S_{OABC}.SH$$

$$\Rightarrow V = V_{S.OABC} = \frac{1}{3}.2S_{\Delta ABC}.SH \quad (1)$$

Thể tích $V_{S.ABC}$ của khối chóp S.ABC bằng thể tích của khối tứ diện SABC

Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{V_{S.OABC}}{V_{S.ABC}} = 2 \quad (3)$

Mặt khác ta có thể tích $V_{S.ABC}$ của khối chóp S.ABC bằng thể tích của khối tứ diện SABC, do đó:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right|. \text{ Mà } \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-5;\ 4;\ -2)$$

và $\overrightarrow{AS} = (9;\ -1;\ -2)$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{6}.\left|-45 - 4 + 4\right| = \frac{15}{2}$$

Từ (3) $\Rightarrow V = V_{S.OABC} = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{15}{2} = 15$

5. Ta có $I\left(\frac{9}{2};\ 0;\ 0\right)$ là trung điểm đoạn OS

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AB và trung điểm đoạn OS

Do đó mặt phẳng (P) qua A(0; 1; 2), B(2; 3; 1); I $(\frac{9}{2}; 0; 0)$

$$\text{Ta có }\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)\\ \overrightarrow{AI}=(\frac{9}{2};-1;-2)\end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(-5;-\frac{1}{2};-11)$ là một vectơ pháp tuyến của **mặt phẳng (P)**

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$-5.(x-0)+(-\frac{1}{2}).(y-1)+(-11)(z-2)=0 \Rightarrow -5.x-\frac{1}{2}.y-11z+\frac{45}{2}=0$$

Vậy phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB và trung điểm đoạn OS là : $-5x-\frac{1}{2}y-11z+\frac{45}{2}=0$

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz viết phương trình **mặt phẳng (α)** qua giao tuyến của (α'): x + y + z − 1 = 0; (β'): 2x − y + 3z = **0 và (α) qua** M (1; 2; 1).

Giải

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng :

$\lambda(x+y+z-1)+\mu(2x-y+3z)=0$ (Với $\lambda^2+\mu^2\neq 0$)

Mặt khác, mặt phẳng (α) qua M(1; 2; 1) nên ta có:

$\lambda(1+2+1-1)+\mu(2-2+3)=0$

$\Rightarrow 3\lambda+3\mu=0$ (*)

$\Rightarrow \mu=-\lambda \Rightarrow \lambda\neq 0$ (vì $\lambda^2+\mu^2\neq 0$)

Vậy phương trình mặt phẳng (α) thỏa mãn bài toán là :

$\lambda(x+y+z-1)+(-\lambda)(2x-y+3z)=0$ (Với $\lambda\neq 0$)

$\Rightarrow -x+2y-2z-1=0$

Bài 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz viết phương trình **mặt phẳng (θ)** qua giao tuyến của (P): x − y + z − 3 = 0 và (β): 3x + y + 2z − 1 = 0

Biết (θ) ⊥ (α) : x + y + 2z − 3 = 0

Chú ý:

+ Viết phương trình mặt phẳng (θ) dạng chùm

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_D}$ của mặt phẳng (θ) tính theo **λ,μ**

+ $(\theta)\perp(\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{n_D}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\Rightarrow \lambda,\mu$

Giải

Phương trình mặt phẳng (θ) có dạng :

$\lambda(x-y+z-3)+\mu(3x+y+2z-1)=0$ (Với $\lambda^2+\mu^2\neq 0$)

$\Rightarrow (\lambda + 3\mu)x + (-\lambda + \mu)y + (\lambda + 2\mu)z - 3\lambda - \mu = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_D} = (\lambda + 3\mu; -\lambda + \mu; \lambda + 2\mu)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (θ)

Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 1; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

Do (θ) ⊥ (α) nên ta có $\overrightarrow{n_D} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_D} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = (\lambda + 3\mu).1 + (-\lambda + \mu).1 + (\lambda + 2\mu).2 = 0$

$\Rightarrow 2\lambda + 8\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -4\mu \Rightarrow \mu \neq 0$ (vì $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$)

Vậy phương trình mặt phẳng (θ) thỏa bài toán là :

$-4\mu(x - y + z - 3) + \mu(3x + y + 2z - 1) = 0$ (Với $\mu \neq 0$)

$\Rightarrow -x + 5y - 2z + 11 = 0$

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz viết phương trình mặt phẳng (θ) qua giao tuyến của (P): $x - y + z - 3 = 0$ và (β): $3x + y + 5z - 1 = 0$

Biết (θ) // (α) : $x + y + 2z - 3 = 0$

Chú ý: *Có thể dùng một trong các phương pháp sau để giải bài 5:*

***Phương pháp 1**: Viết phương trình mặt phẳng (θ) có dạng chùm*

Khi đó ta tìm được λ, μ *nhờ* $\overrightarrow{n_D}, \overrightarrow{n_\alpha}$ *cùng phương.*

***Phương pháp 2**: + Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (θ)*

$\Rightarrow$ *Phương trình mặt phẳng (θ) :* $x + y + 2z + C = 0$ $(C \neq 0)$

+ Chọn điểm M_0 *thuộc (α) và* M_0 *thuộc (β)*

$\Rightarrow M_0$ *thuộc mặt phẳng (θ)*

$\Rightarrow C \Rightarrow$ *Phương trình mặt phẳng (θ)*

***Phương pháp 3**: + Ta có (θ) // (α)* $\Rightarrow$ *Phương trình mặt phẳng (θ) có dạng :*

$x + y + 2z + C = 0$ $(C \neq 0)$

+ Chọn điểm M_0 *thuộc (α) và* M_0 *thuộc (β)*

$\Rightarrow M_0$ *thuộc mặt phẳng (θ)*

$\Rightarrow C \Rightarrow$ *Phương trình mặt phẳng (θ) .*

Giải

Cách 1:

Phương trình mặt phẳng (θ) có dạng:

$\lambda(x - y + z - 3) + \mu(3x + y + 5z - 1) = 0$ (Với $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$)

$\Rightarrow (\lambda + 3\mu)x + (-\lambda + \mu)y + (\lambda + 5\mu)z - 3\lambda - \mu = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_D} = (\lambda + 3\mu; -\lambda + \mu; \lambda + 5\mu)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (θ)

Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 1; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

Do (θ) // (α) nên ta có $\overrightarrow{n_D}$; $\overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{\lambda + 3\mu}{1} = \frac{-\lambda + \mu}{1} = \frac{\lambda + 5\mu}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = -\lambda + \mu \\ 2(\lambda + 3\mu) = \lambda + 5\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda + \mu = 0$

$\Rightarrow \mu = -\lambda \Rightarrow \lambda \neq 0$ (vì $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$)

Vậy phương trình mặt phẳng (θ) thỏa mãn bài toán là:

$\lambda(x - y + z - 3) + (-\lambda)(3x + y + 5z - 1) = 0$ (Với $\lambda \neq 0$)

$\Rightarrow -2x - 2y - 4z - 2 = 0 \Rightarrow x + y + 2z + 1 = 0$

Cách 2:

Ta có (θ) // (α)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (θ) có dạng:

$x + y + 2z + C = 0$ ($C \neq 0$)

Ta có $M_0\left(3; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right) \in (P)$ và $M_0\left(3; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right) \in (\beta)$

Mặt khác, do mặt phẳng (θ) chứa giao tuyến của (α) và (β)

$\Rightarrow M_0\left(3; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right) \in (\theta)$

$\Rightarrow 3 + \left(-\frac{4}{3}\right) + 2\left(-\frac{4}{3}\right) + C = 0 \Rightarrow C - 1 = 0 \Rightarrow C = 1$

Vậy phương trình mặt phẳng (θ) thỏa bài toán là:

$x + y + 2z + 1 = 0$

Bạn đọc tự giải thêm bài tập sau:

Bài 7. Với giá trị nào của m, n thì $5x + my + 4z + n = 0$ thuộc chùm mặt phẳng:
$\lambda(3x - 7y + z - 3) + \mu(x - 9y - 2z + 5) = 0$.

Bài 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz

1. Cho chùm mặt phẳng: $(2x - 3y + z - 5) + \mu(x - 2y - z - 7) = 0$

   a. Mặt phẳng $5x - 9y - 2z + 12 = 0$ có phải là mặt phẳng thuộc chùm mặt phẳng trên không.

   b. Lập phương trình mặt phẳng thuộc chùm mặt phẳng và trên qua O(0; 0; 0).

2. Lập phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến của 2 mặt phẳng.

   (α): $2x - y + 2z - 6 = 0$ và (β): $3x - 6y - 2z - 12 = 0$

   và cắt Ox tại M cách gốc tọa độ một khoảng bằng 2.

Vấn đề III

ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN Oxyz

A. GHI NHỚ :

I. Phương trình đường thẳng

Trong không gian đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng cắt nhau.

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) là::

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{với: } \begin{cases} A_1^2+B_1^2+C_1^2 \neq 0 \\ A^2+B^2+C^2 \neq 0 \\ A:B:C \neq A_1:B_1:C_1 \end{cases}$$

2. Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \quad (2)$$

Chú ý:

a) $M \in (\Delta)$ có phương trình (2) $\Leftrightarrow M(x_0+a_1t;\, y_0+a_2t;\, z_0+a_3t)$

b) Khử t ở (2) ⇒ phương trình dạng (1).

c) (Δ) có phương trình (2)

$\Rightarrow \vec{u} = (a_1;a_2;a_3)$ là một vectơ chỉ phương của (Δ) và $M_0(X_0;Y_0;Z_0) \in (\Delta)$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(X_0;Y_0;Z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1;a_2;a_3)$ là:

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

II. Lưu ý: Có 3 cách tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng (1)

Cách 1:

$$\text{Xét } \begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (A;B;C) \\ \overrightarrow{n_2} = (A_1;B_1;C_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right]$ là một vectơ chỉ phương của (1)

Cách 2: Chọn A; B ∈ (Δ)

$\Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$ là một vectơ chỉ phương của (Δ)

Cách 3: Đưa (1) về phương trình tham số hoặc phương trình chính tắc.

III. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng trong không gian Oxyz:

Cho $M_1 \in (\Delta_1)$, $\vec{u_1}$ là một vectơ chỉ phương của (Δ_1)

$M_2 \in (\Delta_2)$, $\vec{u_2}$ là một vectơ chỉ phương của (Δ_2)

1. $(\Delta_1), (\Delta_2)$ chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$

2. $(\Delta_1), (\Delta_2)$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$

Khi đó có 3 vị trí tương đối của (Δ_1) và (Δ_2)

a. $(\Delta_1) // (\Delta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = 0 \\ M_2 \notin (\Delta_1) \end{cases}$

b. $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = 0 \\ M_2 \in (\Delta_1) \end{cases}$

c. (Δ_1) cắt (Δ_2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$

* ***Chú ý***: Có thể xét hệ $\begin{cases} \text{Phương trình} & (\Delta_1) \\ \text{Phương trình} & (\Delta_2) \end{cases}$ (I) để suy ra vị trí tương đối của $(\Delta_1), (\Delta_2)$

1. Nếu hệ (I) vô nghiệm thì $(\Delta_1) // (\Delta_2)$ hoặc $(\Delta_1), (\Delta_2)$ chéo nhau.
   - * Thêm: $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương $\Rightarrow (\Delta_1) // (\Delta_2)$
   - * Thêm $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ không cùng phương $\Rightarrow (\Delta_1), (\Delta_2)$ chéo nhau
2. Nếu (I) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow (\Delta_1), (\Delta_2)$ cắt nhau tại điểm có toạ độ là nghiệm của hệ (I).
3. Nếu (I) có vô số nghiệm $\Rightarrow (\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$

IV. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng với ba vị trí tương đối:

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz .

Cho (α): $Ax + By + Cz + D = 0$; $\vec{n}(A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của (α) và đường thẳng (d) qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$.

1. (d) cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}$ và $\vec{u}$ không vuông góc

$\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u} = Aa + Bb + Cc \neq 0$

2. $(d) // (\alpha)$ $\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ và $M_0 \notin (\alpha)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} aA + bB + cC = 0 \\ Ax_0 + By_0 + z_0 + D \neq 0 \end{cases}$

3. $(d) \subset (\alpha)$ $\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ và $M_0 \in (\alpha)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = aA + bB + cC = 0 \\ Ax_0 + By_0 + z_0 + D = 0 \end{cases}$

Lưu ý: Có thể xét hệ: $\begin{cases} \text{Phương trình } (\alpha) \text{mặt phẳng } (\alpha) \\ \text{Phương trình } (d) \text{ đường thẳng } (d) \end{cases}$ (I)

để suy ra vị trí tương đối của (α) và (d)

a. Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) // (\alpha)$

b. Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (d) cắt (α)

c. Hệ (I) có hơn một nghiệm $\Leftrightarrow (d) \subset (\alpha)$

*** Các dạng toán thường gặp:**

I. Dạng 1: Tìm giao điểm của một đường thẳng (Δ) và mp (α):

Phương pháp: Giải hệ $\begin{cases} \text{Phương trình} & (\Delta) \\ \text{Phương trình} & (\alpha) \end{cases}$

Bài 1. Trong không gian cho hệ trục tọa độ Oxyz .Xác định giao điểm của đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ và (α): $2x + y - z - 2 = 0$

Giải

Tọa độ giao điểm H của (Δ) và (α) là ba số có thứ tự (x;y;z) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(1+2t) + (1-t) + (1+t) - 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2})$$

Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz xác định giao điểm của (Δ): $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ và $(\alpha): x + y + 2z - 1 = 0$

Giải

Tọa độ giao điểm H của (Δ) và (α) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow H(6;-3;-1)$$

II. Dạng II: Tìm hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α):

* Phương pháp:

+ Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua M và (Δ) $\perp$ (α) (vectơ pháp tuyến của (α) là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ))
+ Giao điểm H của (Δ) và (α) là hình chiếu vuông góc của M trên (α). Tìm H = (Δ) $\cap$ (α).

Bài 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - 3z + 5 = 0$ .Tìm hình chiếu vuông góc của M(1;2; −3) trên (α).

Giải

Ta có $\vec{n}(1; 1; -3)$ là một vectơ pháp tuyến của (α)

Gọi (Δ) là đường thẳng (Δ) qua M(1; 2; −3) và (Δ) $\perp$ (α)

$\Rightarrow$ $\vec{n}(1; 1; -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ)

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \qquad (t \in \mathbf{R}) \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α)

$\Rightarrow$ H = (Δ) $\cap$ (α)

Do đó tọa độ điểm H là bộ (x; y; z) thỏa hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - 3t \\ x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + t) + (2 + t) - 3(-3 - 3t) + 5 = 0 \Rightarrow 11t + 17 = 0 \Rightarrow t = \frac{-17}{11}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \dfrac{-17}{11} = \dfrac{-6}{11} \\ y = 2 + \dfrac{-17}{11} = \dfrac{5}{11} \\ z = -3 - 3.\dfrac{-17}{11} = \dfrac{18}{11} \end{cases} \Rightarrow H(\frac{-6}{11}; \frac{5}{11}; \frac{18}{11})$$

III. Dạng III: Tìm điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (α):

- Phương pháp1: + Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên (α)
  (Ta có H = (Δ) $\cap$ (α), dạng I)
  + M’ là điểm đối xứng của M qua (α).

$\Rightarrow$ H là trung điểm của đoạn MM’ $\Rightarrow$ M’.

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - 3z + 5 = 0$ và $M(13; 2; 3)$

1. Tìm hình chiếu vuông góc của $M(13; 2; 3)$ trên (α).
2. Tìm điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (α).

Giải

1. Ta có $\vec{n}(1; 1; -3)$ là một vectơ pháp tuyến của (α)

Gọi (Δ) là đường thẳng qua M và $(\Delta) \perp (\alpha)$

$\Rightarrow \vec{n}(1; 1; -3)$ là một vectơ chi phương của đường thẳng (Δ)

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là :

$$\begin{cases} x = 13 + t \\ y = 2 + t \qquad\qquad (t \in \mathbf{R}) \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α)

$\Rightarrow H = (\Delta) \cap (\alpha)$

Do đó tọa độ điểm H là bộ (x;y;z) thỏa hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 13 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 3t \\ x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (13 + t) + (2 + t) - 3(3 - 3t) + 5 = 0 \Rightarrow 11t + 11 = 0 \Rightarrow t = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 1 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow H(12; 1; 6)$$

2. Tìm điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (α) :

Gọi M'(a;b;c) là điểm đối xứng của M qua (α)

$\Rightarrow$ H là trung điểm của đoạn MM'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_M + a}{2} \\ y_H = \dfrac{y_M + b}{2} \\ z_H = \dfrac{z_M + c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2x_H - x_M = 2.12 - 13 = 11 \\ b = 2y_H - y_M = 2.1 - 2 = 0 \\ c = 2z_H - z_M = 2.6 - 3 = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M'(11; 0; 9) là điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (α)

IV. Dạng IV : Tìm hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (Δ)

Phương pháp 1:

+ Viết phương trình mặt phẳng (α) qua M và $(\alpha) \perp (\Delta)$ vectơ chi phương của (Δ) là một vectơ pháp tuyến của (α))

+ Tìm $H = (\Delta) \cap (\alpha)$

Phương pháp 2:

+ Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ)

+ H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ)

$\Rightarrow H \in (\Delta) \Rightarrow$ Tọa độ điểm H theo t và $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$

Với $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ)

+ Tìm t bằng cách giải phương trình $\overrightarrow{MH} . \vec{u} = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm H.

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng (Δ) có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ $(t \in R)$ và $M(-1; -1; 1)$. Tìm hình chiếu vuông góc của $M(-1; -1; 1)$ trên (Δ).

Giải

Cách 1 :

Ta có $\vec{u}(1; 1; -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ)

$\Rightarrow \vec{u} = (1; 1; -3)$ là một vectơ pháp tuyến của (α)

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha) \perp (\Delta)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) là: $1(x + 1) + 1(y + 1) - 3(z - 1) = 0$

$\Rightarrow x + y - 3z + 5 = 0$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (Δ)

$\Rightarrow H = (\Delta) \cap (\alpha)$

Do đó tọa độ điểm H là bộ (x;y;z) thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - 3t \\ x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + t) + (2 + t) - 3(-3 - 3t) + 5 = 0 \Rightarrow 11t + 17 = 0 \Rightarrow t = \frac{-17}{11}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{-17}{11} = \frac{-6}{11} \\ y = 2 + \frac{-17}{11} = \frac{5}{11} \\ z = -3 - 3.\frac{-17}{11} = \frac{18}{11} \end{cases} \Rightarrow H(\frac{-6}{11}; \frac{5}{11}; \frac{18}{11})$$

$\Rightarrow H(\frac{-6}{11}; \frac{5}{11}; \frac{18}{11})$ hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (Δ).

Cách 2 : Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (Δ)

$\Rightarrow$ $H \in (\Delta)$ và $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$ ·

($\vec{u}(1; 1; -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ))

$\Rightarrow H(1 + t; 2 + t; -3 - 3t)$ và $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$.

Với $\overrightarrow{MH} = (t + 2; t + 3 ; -4 - 3t)$

$\Rightarrow (t + 2) + (t + 3) - 3(-4 - 3t) = 0$

$\Rightarrow 11t + 17 = 0 \Rightarrow t = \frac{-17}{11} \Rightarrow H(\frac{-6}{11}; \frac{5}{11}; \frac{18}{11})$

$\Rightarrow H(\frac{-6}{11}; \frac{5}{11}; \frac{18}{11})$ hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (Δ)

V. Dạng V: Tìm điểm đối xứng của M qua đường thẳng (Δ)

Phương pháp 1: + Tìm hình chiếu H của M trên (Δ)

+ Gọi M' là điểm đối xứng của M qua (Δ)

$\Rightarrow$ H là trung điểm đoạn MM' $\Rightarrow$ M'

Phương pháp 2: + Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ)

+ $H \in (\Delta)$; H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ)

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm H theo t và $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$

Với $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ)

+ Tìm t bằng cách giải phương trình $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm H

+ Gọi M' là điểm đối xứng của M qua (Δ)

$\Rightarrow$ H là trung điểm đoạn MM' $\Rightarrow$ M'

Bài 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \text{ và điểm } M(0; 2; -1)$$

1. Tìm hình chiếu vuông góc của M trên (Δ).
2. Tìm điểm đối xứng của điểm M qua (Δ).

Giải

1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (Δ)

$\Rightarrow H \in (\Delta)$ và $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$

($\vec{u}(1; 1; -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ))

$\Rightarrow H(1 + t; 2 + t; 3 - 3t)$ và $\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$.

Với $\overrightarrow{MH} = (t + 1; t ; 4 - 3t)$

$\Rightarrow (t + 1) + t - 3(4 - 3t) = 0 \Rightarrow 11t - 11 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 0)$

$\Rightarrow$ H(2; 3; 0) hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (Δ)

2. Tìm điểm đối xứng của điểm M qua (Δ):

Gọi M'(a;b;c) là điểm đối xứng của M qua (Δ)

⇒ H là trung điểm của đoạn MM'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_M + a}{2} \\ y_H = \dfrac{y_M + b}{2} \\ z_H = \dfrac{z_M + c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2x_H - x_M = 4 \\ b = 2y_H - y_M = 4 \\ c = 2z_H - z_M = 1 \end{cases}$$

⇒ M'(4; 4; 1) là điểm đối xứng của điểm M qua (Δ)

VI. Dạng VI: Tìm hình chiếu vuông góc của đường thẳng (Δ) trên mặt phẳng (α)

***Phương pháp:**

Trường hợp 1: (Δ) ⊥ (α) ⇒ hình chiếu của (Δ) trên (α) là H = (Δ) ∩ (α)

Trường hợp 2: (Δ) ⊂ (α) ⇒ hình chiếu của (Δ) trên (α) là chính nó

Trường hợp 3: (Δ) // (α) ⇒ hình chiếu (Δ') của (Δ) trên (α) song song (Δ)

*Cách xác định (Δ') :

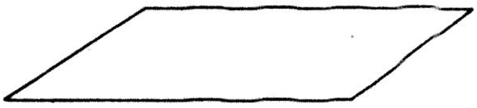
+ Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (Δ) và (β) ⊥ (α)

+ (Δ') = (α) ∩ (β)

Trường hợp 4: (Δ) cắt (α); (Δ) không vuông góc (α).

Hình chiếu (Δ') của (Δ) trên (α) là đường thẳng (Δ') qua giao điểm A của (Δ) và (α)

*Cách xác định (Δ') :



Cách 1: + xác định A = (Δ) ∩ (α).

+ Tìm hình chiếu vuông góc H của M ∈ (Δ) trên (α).

Kết luận: Đường thẳng (Δ') ≡ AH

Cách 2: + Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (Δ) và (β) ⊥ (α)

+ Hình chiếu vuông góc của (Δ) trên (α) là giao tuyến của (α) và (β)

Bài 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng (Δ) có phương trình: $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ và mặt phẳng (α) có phương trình: $2x - y + z - 1 = 0$.

Tìm hình chiếu vuông góc của đường thẳng (Δ) trên mặt phẳng (α).

Giải

Ta có (Δ): $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Xét $\overrightarrow{n_1} = (5; -4; -2)$

$\overrightarrow{n_2} = (1; 0; 2)$

$\Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-8; -12; 4)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ)

Ta có $\vec{n} = (2; -1; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

Ta có $\vec{n}.\vec{u} = -16 + 12 + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$

Mặt khác ta có $M(2; \frac{5}{4}; 0) \in (\Delta)$ và $2.2 - \frac{5}{4} + 0 - 1 \neq 0$

$\Rightarrow M(2; \frac{5}{4}; 0) \notin (\alpha)$

$\Rightarrow (\Delta) // (\alpha)$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (Δ) và $(\beta) \perp (\alpha)$.

Khi đó hình chiếu vuông góc (Δ') của đường thẳng (Δ) trên mặt phẳng (α) là giao tuyến (nếu có) của (α) và (β).

Ta có phương trình mặt phẳng (β) có dạng :

$\lambda(5x - 4y - 2z - 5) + \mu(x + 2z - 2) = 0$ Với $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

$\Rightarrow (5\lambda + \mu)x + (-4\lambda)y + (-2\lambda + 2\mu)z + (-5\lambda - 2\mu) = 0$

Ta có $\overrightarrow{n_\beta} = (5\lambda + \mu; -4\lambda; -2\lambda + 2\mu)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β)

và $\overrightarrow{n_\alpha} = (2; -1; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

Ta có $(\beta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\beta}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow 2(5\lambda + \mu) + (4\lambda) + (-2\lambda + 2\mu) = 0$

$\Leftrightarrow 12\lambda + 4\mu = 0$ (*) $\Leftrightarrow \mu = -3\lambda$

Vậy $\mu = -3\lambda \Rightarrow \lambda \neq 0$ (Vì $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (β) là: $\lambda(5x - 4y - 2z - 5) + (-3\lambda)(x + 2z - 2) = 0$

$\Rightarrow 2x - 4y - 8z + 1 = 0$

Hình chiếu vuông góc (Δ') của (Δ) trên mặt phẳng (α) là giao tuyến của (α) và mặt phẳng (β) .

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng(Δ') là: $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - 4y - 8z + 1 = 0 \end{cases}$

VI. Dạng 7: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng qua 2 điểm.

Phương pháp: Đường thẳng qua 2 điểm A;B có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$

Nên ta có phương trình tham số (hoặc phương trình chính tắc) của đường thẳng AB. Từ đó suy ra phương trình tổng quát của đường thẳng AB.

Bài 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(1; 2; −1); B(3; 1; 1). Viết phương trình tổng quát của đường thẳng qua 2 điểm A,B.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

VIII. Dạng 8: Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua M và (Δ) cắt (Δ_1); (Δ_2). Với (Δ_1); (Δ_2) là hai đường thẳng chéo nhau cho trước không qua M.

Các phương pháp:

Phương pháp 1:

* Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa (Δ_1) và (α) qua M.

* Viết phương trình mặt phẳng (β) qua M và chứa (Δ_2)

+ Nếu (Δ_1); (Δ_2) dưới dạng tổng quát ⇒ phương trình (α); (β) dưới dạng chùm

+ Nếu (Δ_1) dạng tham số ⇒ $A; B \in (\Delta_1)$

⇒ (α) qua 3 điểm không thẳng hàng M; A; B ⇒ pt (α)

+ Xét $(\Delta) = (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow$ phương trình $(\Delta) \begin{cases} \text{pt } (\alpha) \\ \text{pt } (\beta) \end{cases}$

- Nếu (Δ) cắt (Δ_1); (Δ_2) ⇒ (Δ) là đường thẳng cần tìm
- Nếu (Δ) song song (Δ_1) hoặc (Δ_2) ⇒ Bài toán vô nghiệm hình.

Phương pháp 2:

a. Viết phương trình (α) chứa (Δ_1) và $(\alpha) \ni M$

b. Tìm giao điểm $N = (\Delta_2) \cap (\alpha)$

Xét đường thẳng MN

+ Nếu MN cắt (Δ_1) thì bài toán có một nghiệm hình $(\Delta) \equiv MN$

+ Nếu MN // (Δ_1) thì bài toán vô nghiệm hình

* Hoặc (Δ_2) // (α) thì Bài toán vô nghiệm hình.

Bài 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): \begin{cases} y - 2 = 0 \\ 2x - z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad (\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua M(1; 3; 0) và (Δ) cắt (Δ_1); (Δ_2)

Giải

Cách 1. Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (Δ_1) và qua M.

⇒ phương trình (α): $2x + 3y - z - 11 = 0$

+ Mặt phẳng (β) chứa đường thẳng (Δ_2) và qua M.

⇒ phương trình (β) là: $x + 2y - 7 = 0$

+ Xét $(\Delta) = (\alpha) \cap (\beta)$

phương trình $(\Delta): \begin{cases} 2x + 3y - z - 11 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=(1;2;0)\\ \overrightarrow{n_2}=(2;3;-1)\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(-2;1;-1)$ là một véctơ chỉ phương của (Δ)

$\Rightarrow (\Delta) // (\Delta_2) \Rightarrow$ Bài toán vô nghiệm hình.

Cách 2: Xét hệ $\begin{cases}2x+3y-z-11=0\\ x=1+2t\\ y=3-t\\ z=4+t\end{cases} \Rightarrow 0t-4=0$ phương trình vô nghiệm

$\Rightarrow (\Delta_2) // (\alpha)$

$\Rightarrow$ Không có đường thẳng qua M và cắt (Δ_1); (Δ_2).

Bài 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz viết phương trình đường thẳng (Δ) qua $M(1;2;3)$ và (Δ) cắt hai đường thẳng (Δ_1); (Δ_2). Biết:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x-y-2=0\\ 2x-z-6=0\end{cases} \quad \text{và } (\Delta_2): \frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{1}$$

IX. Dạng 9: Viết phương trình đường thẳng (Δ) cắt (Δ_1); (Δ_2) và $(\Delta) // (\Delta_3)$

Cách 1:

Gọi $M_0(x_0; y_0; z_0)=(\Delta)\cap(\Delta_1)$

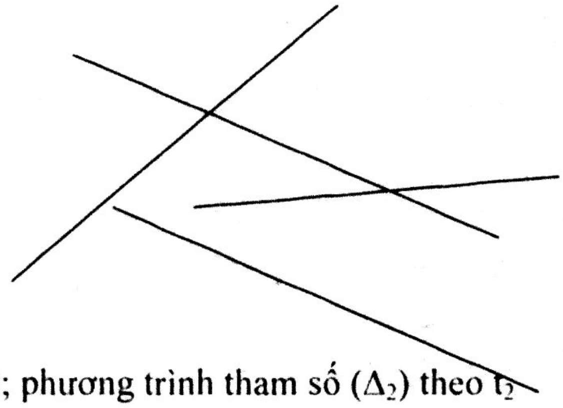
Đường thẳng $(\Delta) // (\Delta_3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u_3}$ là vectơ chỉ phương của (Δ_3) cũng là một vectơ chỉ phương của (Δ)

$\Rightarrow$ Phương trình tham số đường thẳng (Δ) theo $(x_0; y_0; z_0)$

+ $(\Delta)\cap(\Delta_2)$ nên hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases}\text{pt } (\Delta)\\ \text{pt } (\Delta_2)\end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases}x_0=\\ y_0=\\ z_0=\end{cases}$$



$\Rightarrow M_0 \Rightarrow$ phương trình (Δ)

Cách 2:

Phương pháp:

* Viết phương trình tham số $(t\in R)$ của (Δ_1); phương trình tham số (Δ_2) theo t_2

* Xét $M\in(\Delta_1)$; $N\in(\Delta_2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}M \text{ theo } t_1\\ N \text{ theo } t_2\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \text{ theo } t_1;t_2$$

Tìm t_1; t_2 từ điều kiện đường thẳng (Δ) qua M,N và $(\Delta) // (\Delta_3)$

* $\overrightarrow{u_3}; \overrightarrow{MN}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{MN}\right]=\vec{0}$

(vì vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ_3) là $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_3}$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$)

$\Rightarrow t_1; t_2 \Rightarrow M, N \Rightarrow$ đường thẳng (Δ) qua M có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_3}$

$\Rightarrow$ phương trình (Δ).

Cách 3: + Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa (Δ_1); $(\alpha) // (\Delta_3)$

+ Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (Δ_2); $(\beta) // (\Delta_3)$

$\Rightarrow \Delta = (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow (\Delta) // (\Delta_3)$

Phương trình $(\Delta) // (\Delta_3)$ là:

$$\begin{cases} \text{pt } (\alpha) \\ \text{pt } (\beta) \end{cases}$$

* Kiểm tra $\begin{cases} (\Delta) \text{ cắt } (\Delta_1) \\ (\Delta) \text{ cắt } (\Delta_2) \end{cases}$

Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện này bài toán vô nghiệm hình.

Bài11. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz .

Cho: $(\Delta_1): \begin{cases} y - 2 = 0 \\ 2x - z - 5 = 0 \end{cases}$ và $(\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) cắt hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2); (Δ) song song với trục Oz .

Giải

Gọi $M_0(x_0; y_0; z_0) = (\Delta) \cap (\Delta_1)$

$\Rightarrow M_0 \in (\Delta_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0 - 2 = 0 \\ 2x_0 - z_0 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ z_0 = 2x_0 - 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_0(x_0; 2; 2x_0 - 5)$

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k}(0;0;1) \Rightarrow \vec{k}(0;0;1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) (vì Oz // (Δ)).

Vậy đường thẳng (Δ) qua $M_0(x_0; 2; 2x_0 - 5)$ và nhận $\vec{k} = (0; 0; 0; 1)$ làm vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 2 \\ z = z_0 + t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in R)$$

Do $(\Delta) \cap (\Delta_2)$ nên hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x = x_0; y = 2; z = 2x_0 - 5 + t_1 \\ x = 1 + 2t; y = 3 - t; z = 4 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + 2t \\ 2 = 3 - t \\ 2x_0 - 5 + t_1 = 4 + t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x_0 = 3 \\ z_0 = 2.3 - 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow M_0(3;2;1) \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 + t_1 \end{cases}$$

Bài 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz

Cho (d_1): $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}$; (d_2): $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{1}$

(d_3): $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Lập phương trình đường thẳng cắt (d_1), (d_2) và song song đường thẳng (d_3)

Giải

Đường thẳng (d_3) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_3} = (3;-2;1)$

Phương trình tham số của (d_1): $\begin{cases} x = 2 + 3t_1 \\ y = -2 + 4t_1 \\ z = 1 + t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbf{R})$

Phương trình tham số của đường thẳng (d_2): $\begin{cases} x = 7 + t_2 \\ y = 3 + 2t_2 \\ z = 9 + t_2 \end{cases} \quad (t_2 \in \mathbf{R})$

Gọi $A = (d) \cap (d_1) \Rightarrow A(2 + 3t_1;\ -2 + 4t_1;\ 1 + t_1)$

Và $B = (d) \cap (d_2) \Rightarrow B(7 + t_2; 3 + 2t_2; 9 + t_2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (5 - 3t_1 + t_2; 5 - 4t_1 + 2t_2; 8 - t_1 + t_2)$

Xét $(d) // (d_3)$; đường thẳng(d) cắt đường thẳng (d_1); (d_2) lần lượt tại A, B

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_3} = (3;-2;1)$

($\overrightarrow{u_3} = (3;-2;1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d))

$$\Rightarrow \frac{5 - 3t_1 + t_2}{3} = \frac{5 - 4t_1 + 2t_2}{-2} = \frac{8 - t_1 + t_2}{1} \Rightarrow t_1 = \frac{141}{42}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{80}{7};\frac{83}{7};\frac{32}{7}\right)$$

Đường thẳng (d) qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_3}$ nên có phương trình:

$$\begin{cases} x = \frac{80}{7} + 3t \\ y = \frac{83}{7} - 2t \\ z = \frac{32}{7} + t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

X. Dạng 10: Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua M và $(\Delta) \perp (\Delta_1)$ và (Δ) cắt (Δ_2). (M không thuộc (Δ_1), M không thuộc (Δ_2))

Phương pháp:

+ Viết phương trình mặt phẳng (β) qua M; $(\beta) \supset (\Delta_2)$

+ Viết phương trình (α) qua M và $(\alpha) \perp (\Delta_1)$

(vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ của (Δ_1) là một vectơ pháp tuyến của (α))

+ (Δ): $\begin{cases} \text{Phương trình mặt phẳng} & (\alpha) \\ \text{Phương trình mặt phẳng} & (\beta) \end{cases}$

+ Nếu (Δ) cắt $(\Delta_2) \Rightarrow (\Delta)$ là đường thẳng cần tìm.

+ Nếu $(\Delta) \mathbin{/\!/} (\Delta_2)$ thì bài toán vô nghiệm hình.

Bài 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho

$$(\Delta_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{và} \quad (\Delta_2): \begin{cases} 7x + y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua M(1; 2, 0) và $(\Delta) \perp (\Delta_1)$ và (Δ) cắt (Δ_2)

Giải

Ta có M(1; 2; 0) $\notin (\Delta_1)$; M(1; 2; 0) $\notin (\Delta_2)$

Ta có (Δ_1): $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} \\ \dfrac{z+2}{3} = \dfrac{y+1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và $(\alpha) \perp (\Delta_1)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) là :

$\lambda(x - y - 3) + \mu(3y - z + 1) = 0$ (Với $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$)

Mặt phẳng (α) qua M(1; 2; 0) $\Rightarrow \lambda(1 - 2 - 3) + \mu(3.2 - 0 + 1) = 0$

$\Rightarrow -4\lambda + 7\mu = 0$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{7}{4}\mu \Rightarrow \mu \neq 0$ (vì $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) là :

$\dfrac{7}{4}\mu(x - y - 3) + \mu(3y - z + 1) = 0$

$\Rightarrow 7(x - y - 3) + 4(3y - z + 1) = 0$ (vì $\mu \neq 0$)

$\Rightarrow 7x + 5y - 4z - 25 = 0$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (Δ_2) và qua M . Phương trình mặt phẳng (β) là :

$\lambda_1(7x + y - z - 1) + \mu_1(x + 2y + z + 1) = 0$ (Với $\lambda_1{}^2 + \mu_1{}^2 \neq 0$)

Mặt phẳng (β) qua M(1; 2; 0) $\Rightarrow \lambda_1(7.1 + 2 - 0 - 1) + \mu_1(1 + 2.2 + 0 + 1) = 0$

$\Rightarrow 8.\lambda_1 + 6.\mu_1 = 0$

$\Rightarrow \mu_1 = -\dfrac{4}{3}\lambda_1 \Rightarrow \mu_1 \neq 0$

⇒ Mặt phẳng (β) là : $\lambda_1(7x + y - z - 1) + (-\frac{4}{3}\lambda_1)(x + 2y + z + 1) = 0$

⇒ $3(7x + y - z - 1) + (-4)(x + 2y + z + 1) = 0$

⇒ $17x - 5y - 7z - 7 = 0$

Xét (Δ) = (α) ∩ (β)

⇒ (Δ) qua M(1; 2; 0) ; (Δ) ⊥ (Δ_1) ; (Δ) và (Δ_2) đồng phẳng

Ta có phương trình đường thẳng (Δ) là : $\begin{cases} 7x + 5y - 4z - 25 = 0 \\ 17x - 5y - 7z - 7 = 0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (7;5;-4) \\ \overrightarrow{n_2} = (17;-5;-7) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-55 ; -19 ; -120)$

⇒ $\vec{u} = (-55 ; -19 ; -120)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ)

Ta có (Δ_2) : $\begin{cases} 7x + y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

Xét $\begin{cases} \overrightarrow{n'_1} = (7;1;-1) \\ \overrightarrow{n'_2} = (1;2;1) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2 = \left[\overrightarrow{n'_1}, \overrightarrow{n'_2}\right] = (3; -8; 13)$

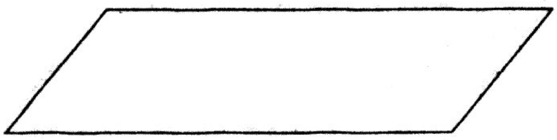
⇒ $\vec{u}_2 = (3; -8; 13)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ_2)

Ta có (Δ) và (Δ_2) đồng phẳng; $\vec{u}$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương

⇒ (Δ) và (Δ_2) cắt nhau

Vậy phương trình đường thẳng (Δ) thỏa bài toán là : $\begin{cases} 7x + 5y - 4z - 25 = 0 \\ 17x - 5y - 7z - 7 = 0 \end{cases}$

XI. Dạng 11: Tìm hình chiếu song song của (Δ_1) trên (α) theo phương đường thẳng (d) (đường thẳng (d) cắt (α))



Phương pháp:

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: (Δ_1) // (d)

Khi đó là hình chiếu song song của (Δ_1) trên (α) theo phương đường thẳng (d) là điểm H = (Δ_1) ∩ (α).

Trường hợp 2: (Δ_1) và (d) không song song

+ Viết phương trình (β) chứa (Δ_1) và (β) // (d)

+ Khi đó hình chiếu song song của (Δ_1) trên (α) là (Δ) = (α) ∩ (β)

⇒ (Δ): $\begin{cases} \text{Phương trình mặt phẳng } (\alpha) \\ \text{Phương trình mặt phẳng } (\beta) \end{cases}$

Bài 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho

$$(\Delta_1):\begin{cases}7x+y-z-1=0\\ x+2y+z+1=0\end{cases};\ (d):\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{3};\ (\alpha):\ x-2y+2z-3=0$$

Viết phương trình hình chiếu song song của (Δ_1) trên (α) theo phương đường thẳng (d).

Giải

Ta có $\vec{u}=(2;\ 1;\ 3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (d)

và $\vec{n}=(1;\ -2;\ 2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

$\Rightarrow\ \vec{n}.\vec{u}=2-2+6=6\neq 0$

$\Rightarrow\ \vec{n}$ và $\vec{u}$ không vuông góc nhau

$\Rightarrow$ Đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (α)

Ta có $(\Delta_1):\begin{cases}7x+y-z-1=0\\ x+2y+z+1=0\end{cases}$

Xét $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=(7;1;-1)\\ \overrightarrow{n_2}=(1;2;1)\end{cases}\Rightarrow \vec{u}_1=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(3;\ -8;\ 13)$

Ta có $\vec{u}_1=(3;\ -8;\ 13)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ_1)

Ta có $\vec{u}_1$ và $\vec{u}$ không cùng phương

$\Rightarrow$ Đường thẳng (d) và (Δ_1) không song song

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (Δ_1) và $(\beta)//(d)$

Phương trình mặt phẳng (β) là:

$\lambda(7x+y-z-1)+\mu(x+2y+z+1)=0$ (Với $\lambda^2+\mu^2\neq 0$)

$\Rightarrow (7\lambda+\mu)x+(\lambda+2\mu)y+(\mu-\lambda)z+(\mu-\lambda)=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\beta}\ (7\lambda+\mu;\ \lambda+2\mu\ ;\ \mu-\lambda)$ là một vectơ pháp tuyến của (β)

Ta có $M_0\ (1;\ 1;\ 2)\in (d)$

Do mặt phẳng $(\beta)//(d)\Rightarrow\begin{cases}M_0\notin(\beta)\\ \overrightarrow{n_\beta}\perp\vec{u}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda(7+1-2-1)+\mu(1+2+2+1)\neq 0\\ \overrightarrow{n_\beta}.\vec{u}=(7\lambda+\mu).2+(\lambda+2\mu)+3(\mu-\lambda)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5\lambda+6\mu\neq 0\\ 12\lambda+7\mu=0\end{cases}$$

$\Rightarrow \mu=-\dfrac{12}{7}\lambda\ \Rightarrow\ \lambda\neq 0$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (β) là :

$\lambda(7x+y-z-1)+(-\dfrac{12}{7}\lambda)(x+2y+z+1)=0$. Với $\lambda\neq 0$

$\Rightarrow 7(7x+y-z-1)+(-12)(x+2y+z+1)=0$

$\Rightarrow\ 37x-17y-19z-19=0$

Hình chiếu song song của (Δ_1) trên (α) theo phương đường thẳng (d) là:

$$(\Delta) = (\alpha) \cap (\beta)$$

$\Rightarrow$ Phương trình hình chiếu song song của (Δ_1) trên (α) theo phương đường thẳng (d) là: $\begin{cases} x - 2y + 2z - 3 = 0 \\ 37x - 17y - 19 - 19 = 0 \end{cases}$

12. Dạng 12: Viết phương trình vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau (Δ_1) và (Δ_2).

* **Đặc biệt:** $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$

Phương pháp:

+ Viết phương trình (α) chứa (Δ_2) và $(\alpha) \perp (\Delta_1)$
+ Tìm $M = (\Delta_1) \cap (\alpha)$
+ Tìm hình chiếu vuông góc của M trên (Δ_2)

$\Rightarrow$ Đường thẳng MN là đường vuông góc cần tìm.

* **Tổng quát:**

Phương pháp 1:

+ Viết phương trình đường thẳng: (Δ_1); (Δ_2) dưới dạng tham số

Gọi $M \in (\Delta_1)$; $N \in (\Delta_2)$ thỏa mãn: $MN \perp (\Delta_1)$ và $MN \perp (\Delta_2)$

+ Khi đó tìm tham số t_1; t_2 nhờ điều kiện $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{u_1} & (\text{vtcp}(\Delta_1)) \\ \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{u_2} & (\text{vtcp}(\Delta_2)) \end{cases}$

* ***Chú ý:*** (Δ_1); (Δ_2) chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{M_{01}M_{02}} \neq 0$

$(M_{01} \in \Delta_1, M_{02} \in \Delta_2)$

Cách 3: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (Δ_1) và $(P) \perp (\Delta_2)$

Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (Δ_2) và $(Q) \perp (\Delta_1)$

$\Rightarrow$ Đường vuông góc bằng $(P) \cap (Q)$

Bài 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho

A(6; 3; 0); B(−2; 9; 1); S(0; 5; 8)

1. Chứng minh rằng S ; B; O; A là bốn đỉnh của một hình tứ diện
2. Chứng minh rằng $SB \perp OA$
3. Viết phương trình đường vuông góc chung của SB ; OA
4. Chứng minh rằng: Hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (OAB) vuông góc với OA. Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA. Xác định K.
5. Gọi P; Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SD; AB. Tìm điểm M trên SB để PQ cắt KM.

Giải

1. Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{SB} = (-2; 4; -7) \\ \overrightarrow{OA} = (6; 3; 0) \\ \overrightarrow{OB} = (-2; 9; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SB} = (-2; 4; -7) \\ \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (3; -6; 60) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SB}.\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] = -6 + 24 + (-420) \neq 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{SB};\ \overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}$ không đồng phẳng

$\Rightarrow$ S; B; O; A là bốn đỉnh của một hình tứ diện (đpcm)

2. Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{SB} = (-2;4;-7)\\ \overrightarrow{OA} = (6;3;0)\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{OA} = -12 + 12 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{OA} \Rightarrow SB \perp OA$

3. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng SB và (α) $\perp$ OA

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (α) qua S(0 ; 5 ; 8) và (α) nhận $\overrightarrow{OA}$ = (6 ; 3 ; 0) làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng(α)là :

$6(x - 0) + 3(y - 5) + 0(z - 8) = 0 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng OA và (β) $\perp$ SB

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (β) qua O(0 ; 0 ; 0) và (β) nhận $\overrightarrow{SB}$ = (–2 ; 4 ; –7) làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng (β) là :

$$-2x + 4y - 7z = 0$$

Đường vuông góc chung (Δ) của SB ; OA là giao tuyến của hai mặt phẳng (α)và (β). Do đó phương trình đường vuông góc chung (Δ) cần tìm là :

$$\begin{cases}2x + y - 5 = 0\\ -2x + 4y - 7z = 0\end{cases}$$

4. ***Cách 1***: Ta có OA $\subset$ (OAB) và SB $\perp$ OA (chứng minh trên)

$\Rightarrow (d_1) \subset (Q)$

Với (Q) là mặt phẳng chứa SB và (Q) $\perp$ (OBA)

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (OAB)

$$\Rightarrow \begin{cases}\vec{n} \perp OA\\ SB \perp OA\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{n} \text{ là một vectơ chỉ phương của (Q)}\\ OA \perp \vec{n}\\ OA \perp SB\end{cases}$$

$\Rightarrow OA \perp (Q) \Rightarrow OA \perp (d_1)$

* K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng OA.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (6;3;0) = 3(2;1;0) \Rightarrow \vec{u} = (2;1;0)$ là một vectơ chỉ phương của (A

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của đoạn thẳng OA là:

$$\begin{cases}x = 2t\\ y = t \qquad (t \in \mathbf{R})\\ z = 0\end{cases}$$

$K \in OA \Rightarrow K(2t;t;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BK} \perp \vec{u}$ mà $\overrightarrow{BK} = (2t + 2; t - 9; -1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BK}.\vec{u} = 4t + 4 + t - 9 = 0 \Rightarrow t = 1$

$\Rightarrow K(2; 1; 0)$

Ta có P; Q là trung điểm cạnh SO; AB

$$\Rightarrow \begin{cases} P(0; \frac{5}{2}; 4) \\ Q(2; 6; \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Đường thẳng PQ và KM cắt nhau.

$\Rightarrow M \in (PQK)$

Mà $M \in SB \Rightarrow M = SB \cap (PQK)$

* Viết phương trình mặt phẳng (KPQ):

Cách 1: Phương trình mặt phẳng (KPQ) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

Điểm P; Q; K $\in$ (PQK); ta có hệ:

$$\begin{cases} 2A + B + D = 0 & (1) \\ \frac{5}{2}B + 4C + D = 0 & (2) \\ 2A + 6B + \frac{1}{2}C + D = 0 & (3) \end{cases}$$

Lấy (3) – (1) vế theo vế ta được: $5B + \frac{1}{2}C = 0$

$\Rightarrow C = -10B$

Lấy (3) – (2) Vế theo vế ta được: $2A + \frac{7}{2}B - \frac{7}{2}C = 0$

$\Rightarrow 2A + \frac{7}{2}B + \frac{70}{2}C = 0 \Rightarrow A = -\frac{77}{4}B$

Khi đó từ (2) $\Rightarrow D = -(\frac{5}{2}B + 4C) = -(\frac{5}{2}B - 40B) = \frac{75}{2}B$

$$\text{Vậy} \begin{cases} A = -\frac{77}{4}B \\ C = -10B \\ D = \frac{75}{2}B \end{cases} \Rightarrow B \neq 0 \text{ (vì } B = 0 \Rightarrow A^2+B^2+C^2 = 0)$$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (KPQ) là: $-\frac{77B}{4}x + By - 10Bz + \frac{75}{2}B = 0$

$\Rightarrow -77x + 4y - 40z + 150 = 0$

Cách 2: Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{KP} = (-2; \frac{3}{2}; 4) \\ \overrightarrow{KQ} = (0; 5; \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KQ}\right] = (\frac{-77}{4}; 1; -10) = -\frac{1}{4}(77; -4; 40)$$

$\Rightarrow \vec{n} = (77; -4; 40)$ là một véctơ phương trình của mặt phẳng (KPQ)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (KPQ) là:

$77(x - 2) - 4(y - 1) + 40z = 0$

$\Rightarrow \quad 77x - 4y + 40z - 150 = 0$

Ta có $\overrightarrow{SB} = (2; -4; 7)$ là 1 véctơ chỉ phương của đường thẳng SB

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của SB là:

$$\begin{cases} x = 2t_1 \\ y = 5 - 4t_1 \\ z = 8 + 7t_1 \end{cases}$$

* Tọa độ M = SB $\cap$ (KPQ) là nghiệm (x;y;z) của hệ:

$$\begin{cases} 77x - 4y + 40z - 150 = 0 \\ x = 2t_1 \\ y = 5 - 4t_1 \\ z = 8 + 7t_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 77(2t_1) - 4(5 - 4t_1) + 40(8 + 7t_1) - 150 = 0$

$\Rightarrow (154 + 16 + 280)t_1 - (150 + 20 - 320) = 0$

$\Rightarrow 450t_1 + 150 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-1}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{19}{3} \\ z = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad M(-\frac{2}{3}; \frac{19}{3}; \frac{17}{3})$

XII. Các bài toán về khoảng cách

1. Loại 1: Các bài toán về tính khoảng cách.

Phương pháp:

Phương pháp 1: Dùng công thức tính khoảng cách tương ứng.

Phương pháp 2: + Dùng công thức diện tích tam giác.

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ một đỉnh của ΔABC đến một cạnh đối diện.

+ Dùng công thức thể tích của khối tứ diện.

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng đối diện với đỉnh.

Bài 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz tìm khoảng cách từ M(1; 2; 3) đến đường thẳng (Δ): $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$

Giải

$M_0(1;-1;1)\in(\Delta)$ và $\vec{u}(2;1;3)$ là một vectơ chỉ phương (Δ)

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{M_0M}=(0;3;2)\\ \vec{u}=(2;1;3)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}\right]=(7;4;-6)$

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ M đến (Δ) là:

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{49+16+36}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{101}{14}}$$

Bài 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho A(1; 2; 3); B(0; 1; 2); C(4; −1; 1). Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng BC.

Giải

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{BA}=(1;1;1)$

Ta có $\overrightarrow{BC}=(4;-2;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng BC

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(1;5;-6)$

Ta có khoảng cách từ A đến BC là:

$$d(A,BC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\sqrt{1+25+36}}{\sqrt{16+4+1}}=\sqrt{\frac{62}{21}}$$

Cách 2: Ta có diện tích ΔABC là: $S=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{62}$

Mặt khác $S=\dfrac{1}{2}BC.d(A,BC)$

$$\Rightarrow d(A,BC)=\frac{2S}{BC}=\frac{\sqrt{62}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{62}{21}}$$

Bài 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho (α): $2x + y + z - 1 = 0$ và (β): $2x + y + z + 10 = 0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α), (β)?

Giải

Ta có $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{10} \quad \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$

Do đó khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song (α), (β) là:

$d(\alpha),(\beta) = d(M,(\beta))$ với $M(0;1;0) \in (\alpha)$

$$= \frac{|1+10|}{\sqrt{6}} = \frac{11\sqrt{6}}{6}$$

Tổng quát:

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng:

(α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (β): $Ax + By + Cz + D_1 = 0$

Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α), (β)

Giải

$$M(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$
$$\Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$$

Ta có: (α) // (β) ⇒ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α),(β) là :

$$d(\alpha, \beta) = d(M, \beta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-D + D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Bài 16. Cho A(5; 7; −2); B(3; 1; 1); C(9; 4; −4); D(−1; 5; 0)

1. Chứng minh: A, B, C, D là 4 đỉnh của 1 tứ diện.
2. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng(BCA).

Giải

1. ***Cách 1***: Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2;-6;1) \\ \overrightarrow{AC} = (4;-3;-2) \end{cases}$

và $\overrightarrow{AD} = (-6; -2; 2)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -90 + 0 + 60 = -30 \neq 0$$

⇒ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

⇒ A, B, C, D là một tứ diện.

Cách 2: Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2;-6;1) \\ \overrightarrow{AC} = (4;-3;-2) \end{cases}$

Ta có $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (15;0;30)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng(ABC)

⇒ Mặt phẳng(ABC) qua A(5; 7; −2) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (15;0;30)$

nên phương trình mặt phẳng(ABC) là:

$15(x-5)+30(z+2)=0$

$\Rightarrow x+2z-1=0$

Ta có: $D(-1;5;0)$; và $-1+2.0-1\neq 0$

$\Rightarrow D\notin (ABC)$

$\Rightarrow$ A, B, C, D là các đỉnh của một tứ diện.

2. ***Cách 1***: $D(-1;5;0)$; (ABC): $x+2z-1=0$

Khoảng cách từ D đến mặt phẳng(ABC) là:

$$d(D,(ABC))=\frac{|-1+2.0-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)\\ \overrightarrow{AC}=(4;-3;-2)\\ \overrightarrow{AD}=(-6;-2;2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(15;0;30)\\ \overrightarrow{AD}=(-6;-2;2)\end{cases}$$

Thể tích khối tứ diện ABCD là:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}|-90+60|=5$$

Mặt khác, ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+30^2}=\frac{15\sqrt5}{2}$

Ta có $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}d(D,(ABC))$

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ D đến mặt phẳng(ABC) là:

$$d(D,(ABC))=\frac{3V}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3.5}{\frac{15\sqrt5}{2}}=\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}$$

2. Loại II: Tìm điểm biết khoảng cách cho trước.

Bài 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho(α): $x+2y-2z-2=0$
Tìm $M\in Oy$ sao cho $d(M,(\alpha))=4$

Giải

Ta có $M\in 0y \Leftrightarrow M(0;y_0;0)$

Theo đề ra ta có $d(M,(\alpha))=4\Leftrightarrow\frac{|2y_0|}{\sqrt{1+4+4}}=4\Leftrightarrow|y_0|=2.3$

$\Leftrightarrow y_0=\pm 6\Leftrightarrow M(0;6;0)$ hoặc $M(0;-6;0)$

Bài 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Cho $M(1;-2;0)$; (α): $3x-2y+6z+9=0$. Tìm $M\in Oz$ sao cho $d(M,(\alpha))=MA$

Giải

Ta có $M \in 0z \Leftrightarrow M(0;\ 0;\ z_0)$

Ta có $MA = d(M, (\alpha)) \Leftrightarrow \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + z_0^2} = \dfrac{|3.1 + 4 + 9|}{\sqrt{9 + 4 + 36}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 4 + z_0^2} = \frac{16}{7} \Leftrightarrow 5 + z_0^2 = \frac{64.4}{49}$$

$$\Leftrightarrow z_0^2 = \frac{4^4}{49} - 5$$

$$\Leftrightarrow z_0^2 = \frac{11}{49} \quad \Leftrightarrow z_0 = \pm\frac{\sqrt{11}}{7}$$

Vậy $M(0;\ 0;\ \frac{\sqrt{11}}{7})$ hoặc $M(0;\ 0;\ -\frac{\sqrt{11}}{7})$

Bài 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng:

$(\Delta): \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$ và (α): $x + y + z + 5 = 0$

Tìm $M \in (\Delta)$ Sao cho $d(M, (\alpha)) = \sqrt{3}$.

Giải

Ta có phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -7 - 3t \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z = t \end{cases}$$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow M(4+t\ ;\ -7 - 3t\ ;\ t)$; $t \in \mathbf{R}$;

Ta có $d(M,(\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{|-t + 2|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |-t + 2| = 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - t = 3 \\ 2 - t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 5 \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} M(3;-4;-1) \\ M(9;-22;5) \end{array}\right.$

Bài 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng (α): $12x - 16y + 15z + 1 = 0$ và (β): $2x + 2y - z - 1 = 0$

Tìm $M \in Ox$ cách đều hai mặt phẳng(α)và (β)

Giải

Ta có: $M \in Ox \Leftrightarrow M(x_0;\ 0;\ 0)$

$d(M, (\alpha)) = d(M, (\beta)) \Leftrightarrow \dfrac{|12x_0 + 1|}{\sqrt{12^2 + 16^2 + 15^2}} = \dfrac{|2x_0 - 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|12x_0+1|}{25}=\frac{|2x_0-1|}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x_0+1=\frac{25}{3}(2x_0-1) \\ 12x_0+1=\frac{25}{3}(1-2x_0) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 36x_0+3=50x_0-25 \\ 36x_0+3=25-50x_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 14x_0=-28 \\ 86x_0=22 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-2 \\ x_0=\frac{11}{43} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(-2;0;0) \\ M(\frac{11}{43};0;0) \end{array}\right.$$

Vấn đề IV
CHỌN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ Oxyz ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

* **PHƯƠNG PHÁP**: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz

Ta có Ox, Oy, Oz vuông góc từng đôi một.

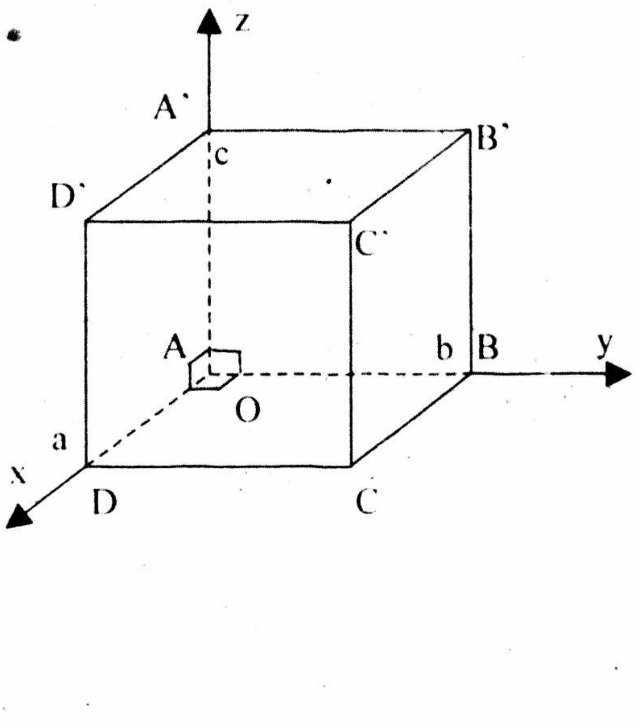
Nếu trong mô hình chứa các cạnh vuông góc thì ta ưu tiên chọn các đường đó lần lượt thuộc các trục tọa độ.

* Chú ý: Cách chọn hệ trục tọa độ cho một số trường hợp:

I. Đối với hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D'

1. Hình chữ nhật ABCD. A'B'C'D'

Chọn hệ trục tọa độ sao cho A(0; 0; 0); B(0; b; 0); C(a; b; 0); D(a; 0; 0); A'(0; 0; c); B'(0; b; c); D'(a; 0; c); C'(a, b, c)

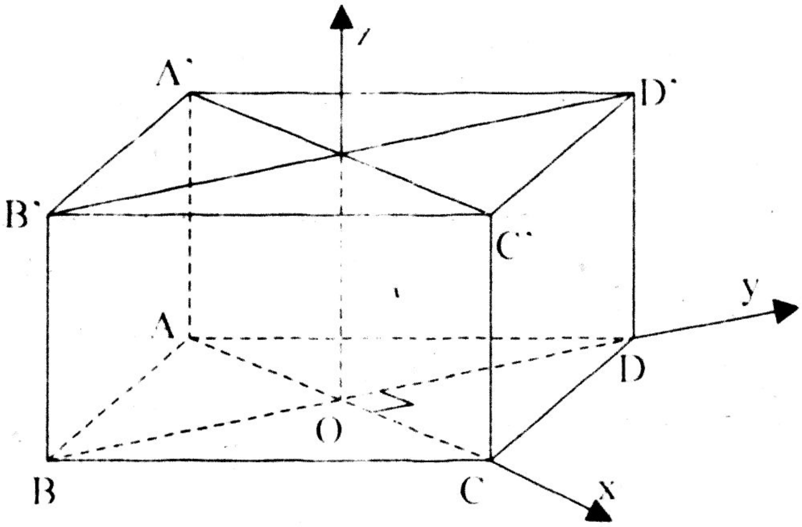


2. Hình lập phương ABCD. A'B'C'D'

3. Đối với hình hộp đường đáy là hình thoi.

Chọn gốc tọa độ là giao điểm 2 đường cao của đáy

Trục cao qua 2 tâm của 2 đáy.



II. Hình chóp đều:

1. Hình chóp tứ giác đều S.ABC.

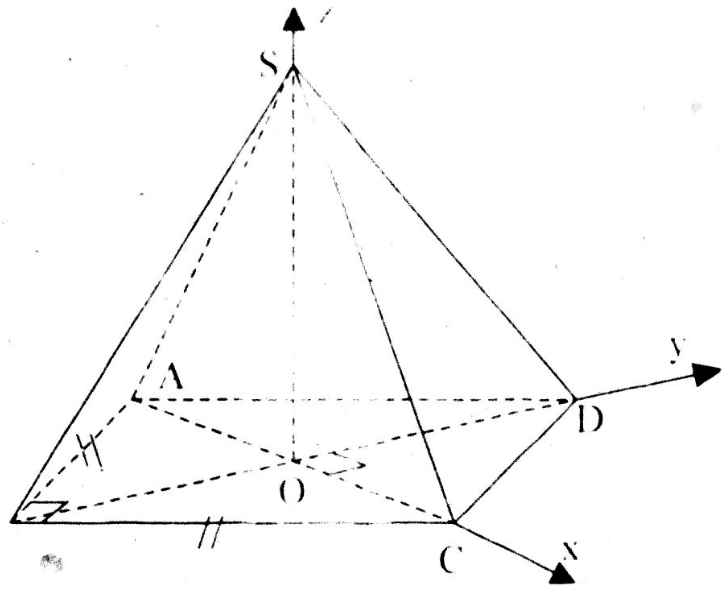
+ Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Giả sử cạnh hình vuông bằng a. SO $= a\sqrt{6}$

+ Chọn O(0;0;0) là tâm hình vuông

$A(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0)$; $C(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0)$

$B(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$; $D(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$; $S(0;0;a\sqrt{6})$



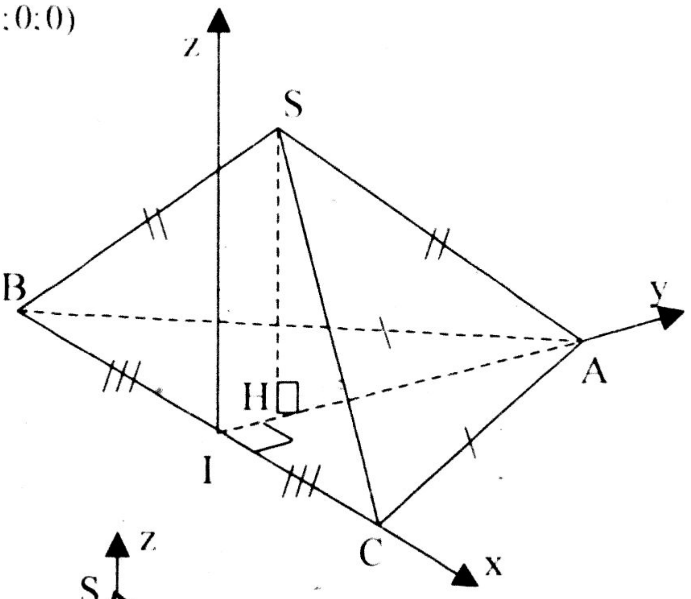
2. Hình chóp tam giác đều: Cạnh a; đường cao h.

Xét hình chóp S.ABC đều, cạnh đáy a, đường cao h.

Gọi I là trung điểm của cạnh BC chọn hệ trục tọa độ sao cho

$I(0;0;0)$; $A(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0)$; $C(\frac{a}{2};0;0)$

$B(-\frac{a}{2};0;0)$; $S(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h)$

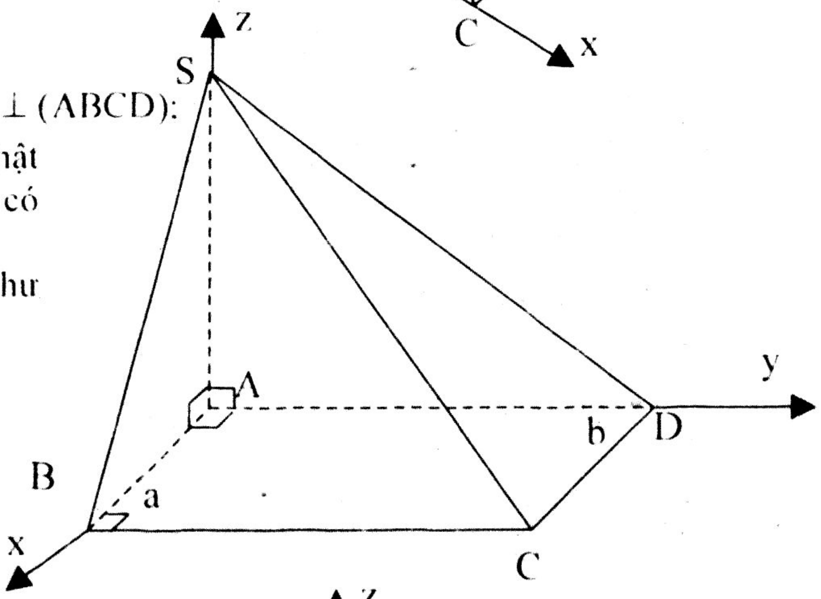


III. HÌNH CHÓP :

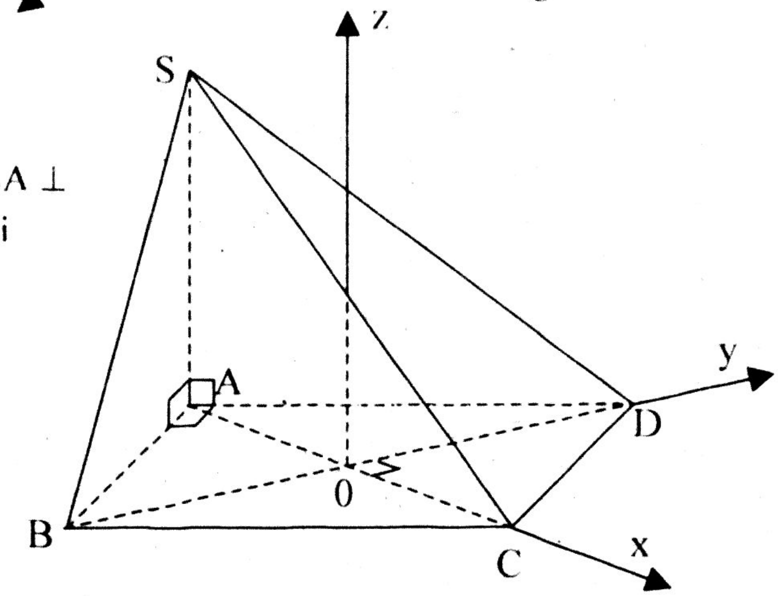
1. Hình chóp S.ABCD; SA ⊥ (ABCD);

* ABCD là hình chữ nhật hoặc ABCD là hình vuông, có AB = a; AD = b; SH = h

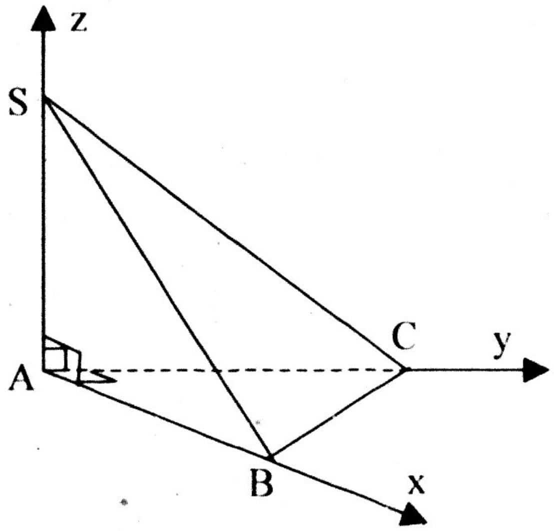
Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho S(0; 0; h); A(0; 0; 0); B(a; 0; 0) ; C(a; b; 0) ; D (0; b; 0)



2. Hình chóp S.ABCD; SA ⊥ (ABCD) ; ABCD là hình thoi

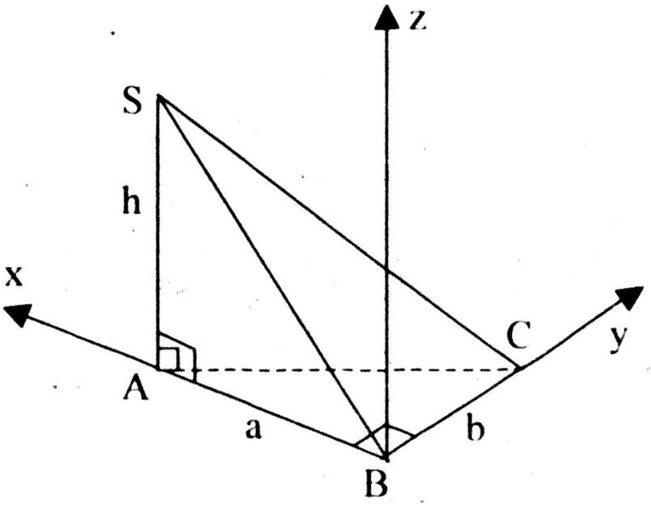


3. Hình chóp S.ABC; SA ⊥ đáy , ΔABC vuông tại A

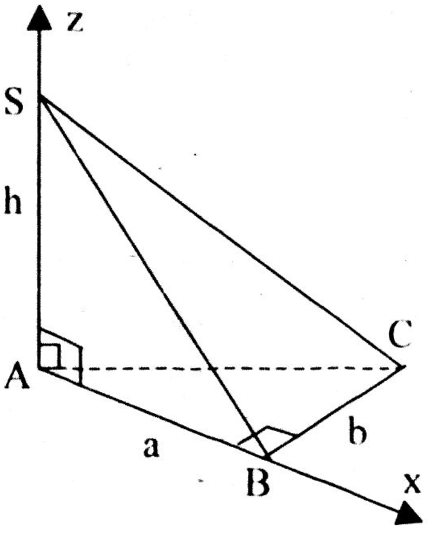


4. Hình chóp S.ABC; SA ⊥ (ABC); ΔABC vuông tại B

Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với B(0; 0; 0); A(a; 0; 0); C(0; b; 0); S(a; 0; h)

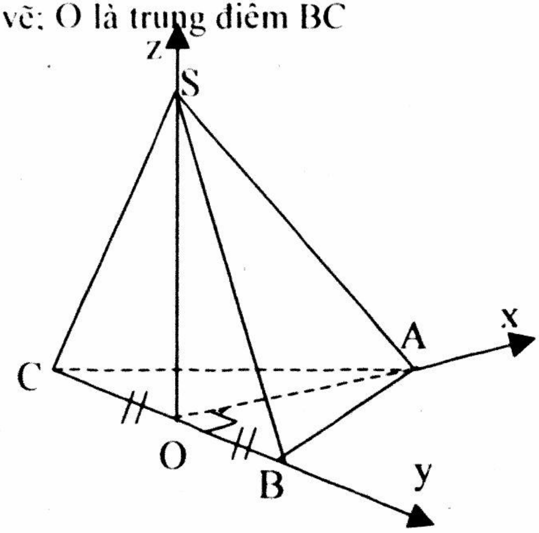

z
S
h
x
C
y
A
a
b
B

Cách 2: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với A(0; 0; 0); S(0; 0; h); B(a; 0; 0); C(a; b; 0)



5. Hình chóp S.ABC (hoặc hình lăng trụ có đáy là ΔABC) với: ΔABC cân ở A hoặc đều.

Chọn hệ trục như hình vẽ; O là trung điểm BC

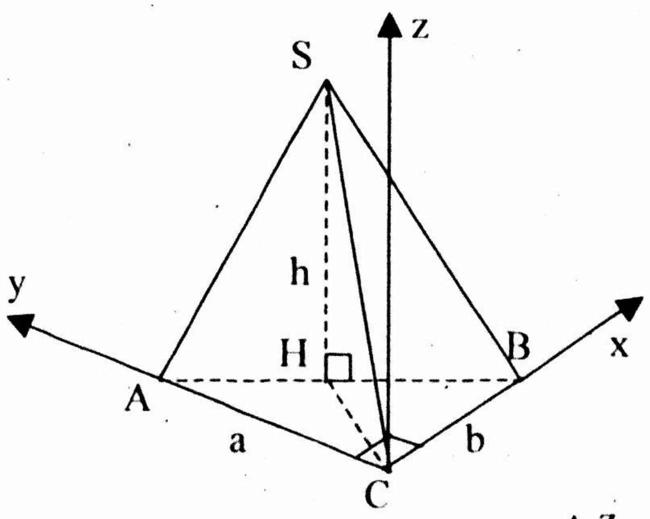


6. Hình chóp S.ABC có (SAB) ⊥ (ABC); ΔSAB cân tại S

a. ΔABC vuông tại C. Chọn hệ trục như hình vẽ

$C \equiv O(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $A(0;b;0)$

$S = (\frac{a}{2};\frac{b}{2};h)$

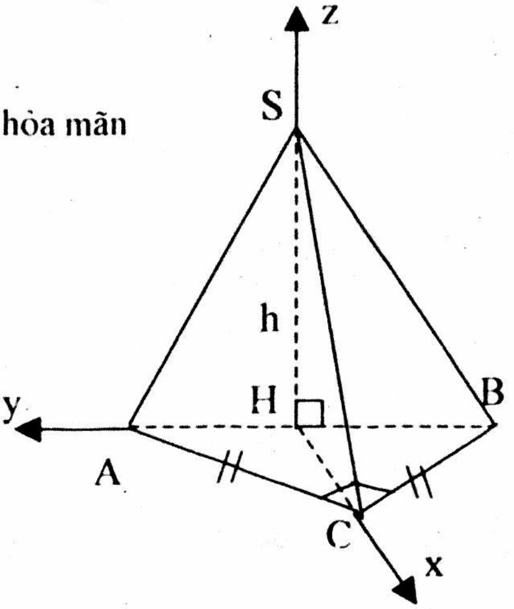


b. ΔABC cân tại C

H là trung điểm AB chọn hệ trục tọa độ thỏa mãn

$H(0;0;0)$; $C(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0)$

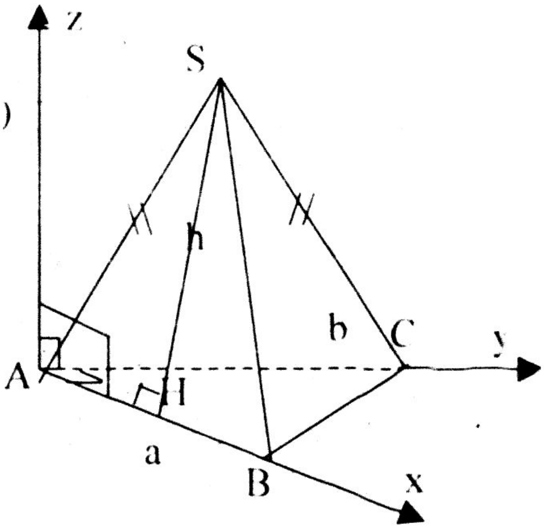
$A(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$; $B(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$; $S(0;0;h)$



c. ΔABC vuông tại A:

Chọn hệ trục tọa độ :

$A(0; 0; 0)$; $B(a; 0; 0)$; $C(0; b; 0)$; $S(0; \frac{a}{2}; h)$

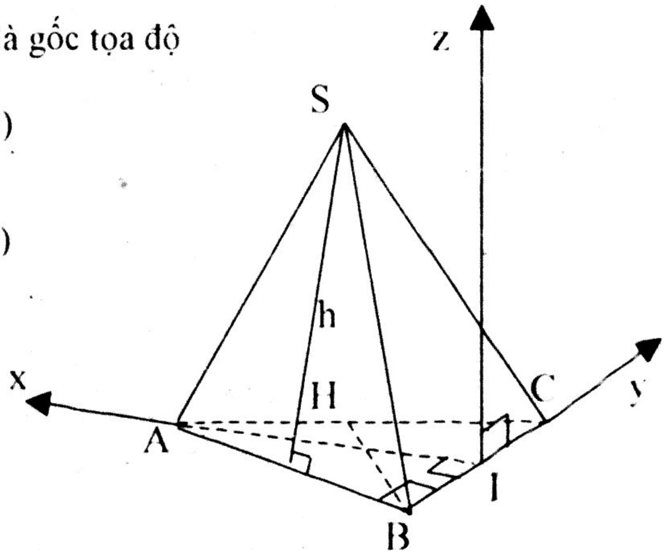


d. ΔABC cân tại A:

Chọn trung điểm I của cạnh BC là gốc tọa độ

$A(\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}};0;0)$; $B(0;-\frac{b}{2};0)$

$C(0;\frac{b}{2};0)$; $H(\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}};\frac{b}{4};0)$



Bài 21. Cho hình chóp S.ABC đáy là ΔABC vuông tại C.

SA ⊥ (ABC); đặt AC = a; SA = h.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CA, SB.

1. Tìm độ dài đoạn MN.

2. Tìm hệ thức liên hệ giữa b, h để đoạn MN là đoạn vuông góc chung của AC và SB.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz Sao cho O ≡ A; S ∈ Oz; C ∈ Ox

Ay ≡ Oy ⊂ (ABC)

Ay ⊥ Ax trong mp (ABC)

(Vì AS ⊥ (ABC)

⇒ Oz ⊥ (Oxy) ≡ (ABC)

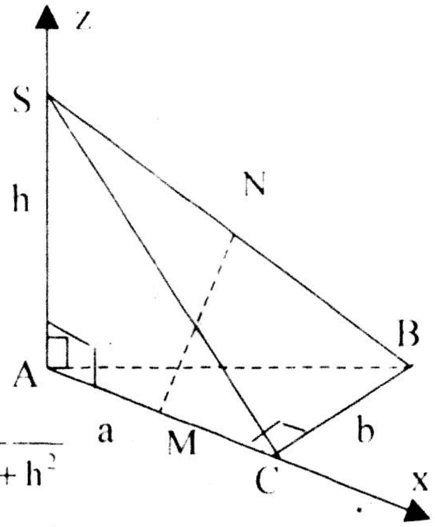
⇒ Oy ⊂ (ABC))

* Chọn hệ tọa độ Oxyz sao cho A ≡ O(0;0;0)

S ∈ Oz ⇒ S(0; 0; h)

C ∈ Ox ⇒ C(a; 0; 0)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp Ox \\ BC = b \end{cases}$ $B \in (Oyx) \Rightarrow B(a;b;0)$



1. Ta có M, N lần lượt là trung điểm cạnh CA; SB

$$\Rightarrow \begin{cases} M(\frac{a}{2};0;0) \\ N(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{h}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;\frac{b}{2};\frac{h}{2}) \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2}$$

2. Đoạn MN là đoạn vuông góc chung của AC và SB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{SB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (a;0;0) \\ \overrightarrow{SB} = (a;b;-h) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.\frac{b}{2} + \frac{h}{2}.0 = 0 \quad (\forall a;b;h) \\ \frac{b^2}{2} - \frac{h^2}{2} = 0 \Leftrightarrow b^2 = h^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow b = h$

Bài 22. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có cạnh bằng a. Trên AB lấy điểm M trên CC' lấy điểm N; trên D'A' lấy điểm P sao cho.

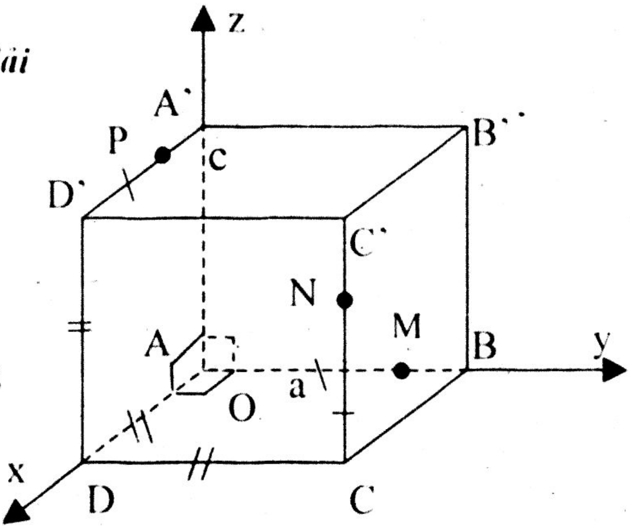
AM = CN = D'P = x (0 ≤ x ≤ a)

1. Chứng minh rằng ΔMNP đều. Tính chu vi ΔMNP, xác định x để chu vi đó nhỏ nhất.

Tính diện tích ΔMNP theo a; x. Tìm x để diện tích ΔMNP nhỏ nhất.

2. Khi $x = \frac{a}{2}$ hãy tính thể tích khối tứ diện MNPB và bán kính tâm mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện MNPB'.

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho

A ≡ O(0; 0; 0)

A' ∈ Oz và A'(0, 0, a)

B ∈ Oy và B(0; a; 0)

D ∈ Ox và D(a; 0; 0)

C'(a; a; a); B'(0; a; a); D'(a; 0; a)

Ta có N(a; a; x); M(0; x; 0) ≡ (0; x; 0);

P(a – x; 0; a)

1. Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = (a - x; a; x) \Rightarrow MN = \sqrt{(a-x)^{2} + a^{2} + x^{2}}$$

$$\overrightarrow{MP} = (a - x; -x; a) \Rightarrow MP = \sqrt{(a-x)^{2} + a^{2} + x^{2}}$$

$$\overrightarrow{NP} = (-x; -a; a - x) \Rightarrow NP = \sqrt{a^{2} + x^{2} + (a-x)^{2}}$$

Vậy $MN = NP = MP = \sqrt{a^{2} + x^{2} + (a-x)^{2}}$ (dpcm)

Do đó ΔMNP là tam giác đều.

* Diện tích ΔMNP là:

$$S = \frac{1}{4}MN^{2}.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}[x^{2} + a^{2} + (a-x)^{2}]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[2x^{2} - 2ax + 2a^{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^{2} - ax + a^{2})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(x - \frac{a}{2})^{2} + \frac{3a^{2}}{4}\right] \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3a^{2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}.a^{2}}{8}$$

Vậy diện tích ΔMNP đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3\sqrt{3}.a^{2}}{8} \Leftrightarrow \frac{a}{2} = x$

Kết luận: Vậy $x = \frac{a}{2}$ diện tích ΔMNP đạt giá trị nhỏ nhất .

$$y_{Min} = S_{Min} = \frac{3a^{2}\sqrt{3}}{8}$$

* Chu vi ΔMNP là:

$$2p = 3MN = 3\sqrt{a^{2} + x^{2} + (a-x)^{2}}$$

$$= 3\sqrt{2x^{2} + 2ax + 2a^{2}} = 3\sqrt{2(x - \frac{1}{2}a)^{2} + \frac{3a^{2}}{2}} \geq 3\sqrt{\frac{3}{2}a^{2}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - \frac{1}{2}a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Vậy chu vi ΔMNP đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3a\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện MNPB

$$\begin{cases} IM = IN \\ IM = IP \\ IM = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \\ b = \\ c = \end{cases}$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $R = IB$

2. Thể tích khối tứ diện $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MB}\right|$

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (a - x; a; x) \\ \overrightarrow{MP} = (a - x; -x; a) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = [(a^2 + x^2); (x - a)^2; (x^2 - a^2)]$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = (0; a - x; 0)$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}\left|-(x - a)^2.(a - x)\right| = \frac{1}{6}\left|(a - x)^3\right| = \frac{(a - x)^3}{6}$$

Bài 23. Cho hình chóp S.ABC đều có đường cao SO = 1; đáy là ΔABC đều cạnh $2\sqrt{6}$. Điểm M, N là trung điểm của cạnh AC, AB. Tính thể tích của hình chóp S.AMN và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.

Giải

Cách 1:

* Thể tích hình chóp S.AMN là

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3}SO.S_{\Delta AMN}$$

Mà $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 \quad (\widehat{MAN} = 60^0)$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}.\sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{2}.\sqrt{3}$$

* Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp S.AMN

$$\Rightarrow S = \frac{1}{3}r(S_{\Delta AMN} + S_{\Delta SAM} + S_{\Delta SAM} + S_{\Delta SMN}) \quad (*)$$

Mà ΔSAM = ΔSAN $\Rightarrow S_{\Delta SAM} = S_{\Delta SMN}$

* Ta có $MN = \frac{BC}{2} = \sqrt{6}$

Gọi $K = MN \cap AI$ (I là trung điểm cạnh BC)

$\Rightarrow$ K là trung điểm MN mà SM = SN

$\Rightarrow SK \perp MN$

$$\Rightarrow S_{\Delta SMN} = \frac{MN.SK}{2}$$

ΔSKO vuông ở O; $AI = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow SK^2 = SO^2 + OK^2$

Ta có

$$AK = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$AO = \frac{2}{3}AM = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow OK = OA - AK = 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow SK^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow SK = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta SMN} = \sqrt{6}.\frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3}{2}$$

* Ta có: $S_{\Delta AMN} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}AM.SM$$

vì $AC \perp BO \Rightarrow AC \perp BM$

$(AC \perp OM \Rightarrow AC \perp SM)$

Mà $AM = \frac{1}{2}AC = \sqrt{6}$

$$SM^2 = SO^2 + OM^2$$

$$OM = \frac{1}{3}BM = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SM^2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow SM = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}.\sqrt{6}.\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Từ (*) ta có:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}r\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2.\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = r\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} = r(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1) \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1}$$

Cách 2:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho trung điểm I của cạnh BC là gốc tọa độ

$\Rightarrow I(0; 0; 0)$; $B(0; \sqrt{6}; 0)$; $C(0; -\sqrt{6}; 0)$; $A(3\sqrt{2}; 0; 0)$; $S(\sqrt{2}; 0; 1)$

(Vì $IO = \frac{1}{3}IA$ mà $IA = \frac{2\sqrt{6}.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow IO = \sqrt{2}$)

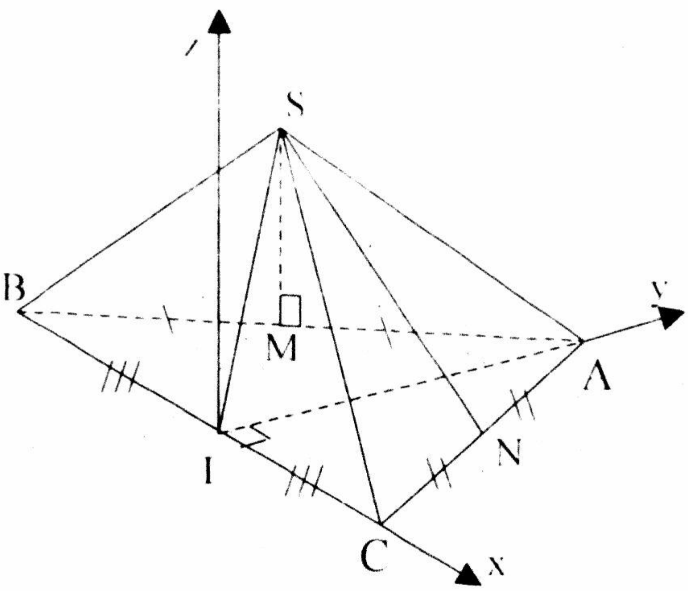
thể tích khối chóp S.AMN là:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AS}\right|$$ mà

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; 0) \\ \overrightarrow{AN} = (-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}; 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = (0; 0; -3\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{AS} = (-2\sqrt{2}; 0; 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}\left| -3\sqrt{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Gọi J là tâm khối cầu (S) nội tiếp khối chóp S.AMN và r là bán kính của (S).
Ta có:

$$V = \frac{1}{3}r(S_{\Delta AMN} + 2S_{\Delta SAM} + S_{\Delta SMN}) \quad (*) \quad (\text{Với } S_{\Delta SAM} = S_{\Delta SAM})$$

(*) Ta có: $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|3\sqrt{3}\right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(*) $S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AS}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{4} + \frac{18}{4} + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Vi $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AS}\right] = (-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; -2\sqrt{3})$

(*) $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{NS}\right]\right| = \frac{3}{2}$

Vi $\begin{cases} \overrightarrow{MS} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}; 1) \\ \overrightarrow{NS} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; 1) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{NS}\right] = (\sqrt{6}; 0; \sqrt{3})$

Từ (*) ta có:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}r(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2.\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = r(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} = r(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1}$$

Vấn đề V

MẶT CẦU; GIAO CỦA MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU

A. GHI NHỚ :

I. Phương trình mặt cầu:

1. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I(a; b; c) và có bán kính R (R > 0) là:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2} \quad (1)$$

* Đặc biệt : $I(a; b; c) \equiv O(0; 0; 0)$

Phương trình mặt cầu tâm O(0; 0; 0); bán kính R là: $x^2+y^2+z^2=R^2$

2. Phương trình: $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$

(Với $A^2+B^2+C^2-D>0$)

là phương trình mặt cầu tâm I(–A; –B; –C) và bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$

II. Giao của mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt phẳng (α) : $Ax+By+Cz+D=0$ và mặt cầu (S) :

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm I(a; b; c); bán kính R

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I(a; b; c) trên mặt phẳng (α):

$\Rightarrow IH = d(I,(\alpha))$

1. IH < R thì giao của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) là đường tròn có tâm H và bán kính $r = R - \sqrt{R^2-IH^2}$. Khi đó:

+ Phương trình đường tròn giao tuyến là: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \end{cases}$

2. Nếu IH > R thì $(\alpha)\cap(S)=\phi$

3. Nếu IH = R thì $(\alpha)\cap(S)=\{H\}$

Khi đó $(\alpha)\perp IH$ tại H và (α) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S)

III. Chú ý:

Vị trí tương đối của điểm M đối với mặt cầu (S) có tâm I; bán kính R:

* IM < R ⇔ M ở bên trong mặt cầu (S)

* IM = R ⇔ M ∈ (S)

* IM > R ⇔ M ở bên ngoài mặt cầu (S)

Bài 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Lập phương trình mặt cầu (S). Biết mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1): $6x-3y-2z-35=0$ và (α_2): $6x-3y-2z+63=0$; điểm A(5; –1; –1) là một tiếp điểm.

Giải

Ta có: $(\alpha_1)//(\alpha_2)$ và $A(5;-1;-1)\in(\alpha_1)$ vì: $6.5-3(-1)-35=0$

Gọi B là hình chiếu của A trên (α_2)

Ta có: AB là đường kính của mặt cầu

Do đó: $2R = d(I, (\alpha_2)) = \dfrac{|6.5 - 3.(-1) - 2(-1) + 63|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{98}{7} = 14$

(R là bán kính mặt cầu (S))

$\Rightarrow R = \dfrac{14}{2} = 7$

Đường thẳng AB đi qua A(5; −1; −1) và nhận $\overrightarrow{n_{\alpha_2}} = (6; -3; -2)$ làm vectơ chỉ phương.

⇒ Phương trình tham số của đường thẳng AB là:

$$\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -1 - 3t \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Tọa độ điểm B là bộ (x; y; z) thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -1 - 3t \\ z = -1 - 2t \\ 6x - 3y - 2z + 63 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 6(5 + 6t) - 3(-1 - 3t) - 2(-1 - 2t) + 63 = 0$

$\Rightarrow 49t + 98 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow B(-7; 5; 3)$$

Gọi I là tâm mặt cầu

⇒ I là trung điểm đoạn AB với A(5; −1; −1) ⇒ I(−1; 2; 1)

⇒ Phương trình mặt cầu (S):

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$

Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (D): $\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$

Giải

(S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$

Ta có $A = 1; B = -3; C = 2; D = -15$

⇒ Tâm mặt cầu là I(−1; 3; −2) và bán kính là:

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D} = \sqrt{1 + 9 + 4 + 15} = \sqrt{29}$

* Phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (D) có dạng:

$\lambda(8x - 11y + 8z - 30) + \mu(x - y - 2z) = 0 \qquad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

$\Rightarrow (8\lambda + \mu)x - (\mu + 11\lambda)y + 2(4\lambda - \mu)z - 30\lambda = 0$

Do (α) tiếp xúc mặt cầu (S) nên:

$d(I, (\alpha)) = \sqrt{29}$

$$\Leftrightarrow \frac{|-(8\lambda + \mu) - 3(\mu + 11\lambda) + 2(4\lambda - \mu)(-2) - 30\lambda|}{\sqrt{(8\lambda + \mu)^2 + (\mu + 11\lambda)^2 + 4(4\lambda - \mu)^2}} = \sqrt{29}$$

$\Leftrightarrow |-87\lambda| = \sqrt{29}.\sqrt{249\lambda^2 + 6\lambda\mu + 6\mu^2} \qquad (1)$

$\Leftrightarrow (87)^2.\lambda^2 = 29(249\lambda^2 + 6\mu.\lambda + 6\mu^2)$

$\Leftrightarrow 7569\lambda^2 = 7221\lambda^2 + 174\mu.\lambda + 174\mu^2$

$$\Leftrightarrow 174\mu^2 + 174\mu - 348 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mu = \lambda \\ \mu = -2.\lambda \end{array}\right.$$

*Với $\mu = \lambda \Rightarrow \lambda \neq 0$ (Vì $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (D) thỏa bài toán là :

$\lambda(8x - 11y + 8z - 30) + \lambda(x - y - 2z) = 0$

$\Rightarrow (8x - 11y + 8z - 30) + (x - y - 2z) = 0$ (vì $\lambda \neq 0$)

$\Rightarrow 9x - 12y + 6z - 30 = 0$

*Với $\mu = -2\lambda \Rightarrow \lambda \neq 0$ (Vì $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng (D) thỏa bài toán là :

$\lambda(8x - 11y + 8z - 30) + (-2\lambda)(x - y - 2z) = 0$

$\Rightarrow (8x - 11y + 8z - 30) + (-2)(x - y - 2z) = 0$ (vì $\lambda \neq 0$)

$\Rightarrow 6x - 9y + 12z - 30 = 0$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa bài toán với phương trình:

$9x - 12y + 6z - 30 = 0;\ 6x - 9y + 12z - 30 = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y + 2z - 10 = 0;\ 2x - 3y + 4z - 10 = 0$

Bài 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz . Lập phương trình mặt cầu (S):

1. Có tâm I(2; 1; −2) và điểm A(3; 2; −1) ∈ (S)
2. Ngoại tiếp tứ diện ABCD, với A(1; 0; −2); B(2; 1; 2); C(3; −1; 1); D(2; −3; 0).

Giải

1. Bán kính mặt cầu (S) là: Ta có: $\overrightarrow{IA} = (1;1;1)$

$R = IA = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S) tâm I(2; 1; −2); bán kính $R = \sqrt{3}$ là:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 3$

2. Phương trình mặt cầu (S) qua A; B; C; D có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

Do A; B; C; D ∈ mặt cầu này nên ta có:

$$\begin{cases} 1+4+2A+2C(-2)+D=0 \\ 4+1+4+4A+2B+4C+D=0 \\ 4+9+4A-6B+D=0 \\ 9+1+1+6A-2B+2C+D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A-4C+D+5=0 & (1) \\ 4A+2B+4C+D+9=0 & (2) \\ 4A-6B+D+13=0 & (3) \\ 6A-2B+2C+D+11=0 & (4) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow D = -2A + 4C - 5$ (5)

Thay (5) vào (2); (3); (4) ta được:

$$\begin{cases} 4A+2B+4C-2A+4C-5+9=0 \\ 4A-6B-2A+4C-5+13=0 \\ 6A-2B+2C-2A+4C-5+11=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A+2B+8C+4=0 \\ 2A-6B+4C+8=0 \\ 4A-2B+6C+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B4C+2=0 \\ A-2B+2C+4=0 \\ 2A-B+3C+3=0 & (6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A+7C+5=0 \\ 4A+14C+10=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{70-70}{14}=0 \\ C=-\frac{10}{14}-\frac{5}{7} \end{cases}$$

Từ (6) $\Rightarrow B = 3C + 3 = -\frac{15}{7} + 3 = \frac{6}{7}$

Từ (5) $\Rightarrow D = 4C - 5 = -\frac{20}{7} - 5 = -\frac{55}{7}$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{12}{7}y - \frac{10}{7}z - \frac{55}{7} = 0.$$

Bài 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng $(D): \begin{cases} 5x-4y+3z+20=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$ cắt mặt cầu tâm I(2; 3; −1) theo một dây có tọa độ bằng 16. Tìm phương trình mặt cầu?

Giải

Ta có: $M(0;\ -\frac{11}{2};\ -14)$ và $N(-14;\ -\frac{25}{2};\ 0)$ thuộc đường thẳng đã cho.

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM}=(14;\frac{14}{2};-14)=7(2;1;-2)$$

$\Rightarrow \vec{u}=(2;\ 1;\ -2)$ là một vetơ chỉ phương của đường thẳng

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MI}=(2;\ \frac{17}{2}\ ;\ 13)\\ \vec{u}=(2;\ 1;\ -2)\end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]=(-30;30;-15)$$

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến đường thẳng là:

$$d(I,\Delta)=\frac{\left\|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right\|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{30^2+30^2+15^2}}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$=\frac{\sqrt{15^2(4+4+1)}}{\sqrt{9}}=15$$

Theo bài ra ta có; bán kính R của mặt cầu được tính:

$$R^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left[d(I,\ \Delta)\right]^2=64+15^2=64+225=289$$

$\Rightarrow R=17$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$$

Bài 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho (C):

1. Tìm tọa tâm và bán kính của (C) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-3=0\\ 5x+2y-z-3=0\end{cases}$

2. Viết phương trình mặt cầu qua đường tròn(C) và đi qua điểm M(2; −1; 1).

Giải

1. (C): $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-3=0\\ 5x+2y-z-3=0\end{cases}$

Vậy đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu (S_1) :

$x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-3=0$ và mặt phẳng (α): $5x+2y-z-3=0$

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;\ \frac{-3}{2};\ 3)$ và bán kính $R_1=\sqrt{1+\frac{9}{4}+3+3}=\frac{\sqrt{37}}{2}$

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(5;\ 2;\ -1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I_1 trên mặt phẳng (α)

$\Rightarrow$ H là tâm của đường tròn (C) và đường thẳng HI_1 nhận $\vec{n}=(5;\ 2;\ -1)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình đường thẳng HI_1 là:

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -\frac{3}{2} + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

Tọa độ điểm H là bộ (x; y; z) thỏa hệ $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -\frac{3}{2} + 2t \\ z = 3 - t \\ 5x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 5(1 + 5t) + 2(-\frac{3}{2} + 2t) - (3 - t) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 28t - 4 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{7} \\ y = -\frac{17}{7} \\ z = \frac{20}{7} \end{cases} \Rightarrow H(\frac{12}{7}; -\frac{17}{7}; \frac{20}{7})$$

$\Rightarrow$ Ta có $I_1H = d(I_1,(\alpha)) = \dfrac{\left|5.1 + 2.\frac{-3}{2} - 3 - 3\right|}{\sqrt{25 + 4 + 1}} = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$

Vậy bán kính đường tròn (C) là: $r^2 = R_1^2 - I_1H^2 = \dfrac{523}{60} \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{523}{15}}$

2. Ta có mặt cầu (S) chứa (C) $\Rightarrow$ tâm I của (S) thuộc đường thẳng I_1H

$$\Rightarrow I(1 + 5t; -\frac{3}{2} + 2t; 3 - t)$$

Ta có (S) qua M(2; −1; 1)

$\Rightarrow$ Bán kính R của (S) được tính:

$R^2 = IM^2 = r^2 + d(I,\alpha)$

$\Rightarrow I(-\dfrac{13}{2}; -\dfrac{9}{2}; \dfrac{9}{2})$ và $R = \dfrac{\sqrt{331}}{2}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S) là: $(x - \dfrac{13}{2})^2 + (y + \dfrac{9}{2})^2 + (z - \dfrac{9}{2})^2 = \dfrac{331}{4}$

Chú ý: Bạn đọc có thể tham khảo cách giải sau:

Mặt cầu cần tìm có phương trình:

$$\lambda(x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5)+\mu(5x+2y-z-3)=0\ \ (\lambda^2+\mu^2>0)$$

Mặt khác, do mặt cầu qua điểm I(2; −1;1) nên ta có:

$$\lambda(4+1+1-4-3-6-5)+\mu(10-2-1-3)=0$$

$$\Leftrightarrow -12\lambda+4\mu=0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\lambda+\mu=0$$

$$\Rightarrow \mu = -3.\lambda \quad \Rightarrow \lambda\neq 0 \ (\text{vì } \lambda^2+\mu^2>0)$$

⇒ Phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$\lambda.(x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5)-3\lambda(5x+2y-z-3)=0 \text{ với } \lambda\neq 0$$

$$(x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5)+3(5x+2y-z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+13x+9y-9z-14=0.$$

Bài 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2)

$$(\Delta_1)\begin{cases}x=4+t\\ y=3-t;(t\in\mathbf{R})\\ t=4\end{cases};\quad (\Delta_2)\begin{cases}x=2\\ y=1+2t';(t'\in\mathbf{R})\\ y=t'\end{cases}$$

Tìm phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của (Δ_1) và (Δ_2) lm đường kính.

Giải

Gọi $N\in(\Delta_1)\Rightarrow N(4+t;\ 3-t;\ 4)$ và $M\in(\Delta_2)\Rightarrow M(2;\ 1+2t';\ t')$

Đạan thẳng NM là đoạn vuông góc chung của (Δ_1) và (Δ_2)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{NM}\perp\vec{u} & \text{với } \vec{u} \text{ là véctơ chỉ phương } (\Delta_1)\\ \overline{NM}\perp\vec{u} & \text{với } \overline{u'} \text{ là véctơ chỉ phương } (\Delta_2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{NM}.\vec{u}=0\\ \overline{NM}.\overline{u'}=0\end{cases}\quad \text{với}\begin{cases}\vec{u}=(1;-1;0)\\ \overline{u'}=(0;2;1)\\ \overline{NM}=(-2-t;-2+t+2t';t'-4)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2-t-(-2+t+2t')=0\\ 2(-2+t+2t')+t'-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2t-2t'=0\\ 2t+5t'-8=0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{8}{3}\\ t'=\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow N(\frac{4}{3};\frac{17}{3};4)$$

$\Rightarrow N(\frac{4}{3}; \frac{17}{3}; 4)$ và $M(2; \frac{19}{3}; \frac{8}{3})$

Mặt cầu (S) nhận đoạn vuông góc chung NM của (Δ_1) và (Δ_2) làm đường k

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{5}{3}; 6; \frac{10}{3}\right)$ là trung điểm đoạn NM và bán kính là

$$R = \frac{NM}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{4}{3})^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(Vì $\overline{NM} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{-4}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S) là:

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y-6)^2 + \left(z - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{6}{9}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y-6)^2 + \left(z - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

Bài 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + 6z - 18 = 0$ thỏa mặt phẳng (α) cắt Ox tại A; Oy tại B; Oz tại C.Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC

Giải

Ta có: $A = Ox \cap (\alpha)$; $B = Oy \cap (\alpha)$; $C = Oz \cap (\alpha)$

*Do $A \in (\alpha) \Rightarrow A(x_A; 0; 0)$

Mà $A \in (\alpha) \Rightarrow 2x_A - 18 = 0 \Rightarrow x_A = 9$

$\Rightarrow A(9; 0; 0)$

* Do $B \in (\alpha) \Rightarrow B(0; y_B; 0)$

Mà $B \in (\alpha) \Rightarrow 3y_B - 18 = 0 \Rightarrow y_B = 6$

$\Rightarrow B(0; 6; 0)$

* Do $C \in (\alpha) \Rightarrow C(0; 0; z_C)$

Mà $C \in (\alpha) \Rightarrow 6z_C - 18 = 0 \Rightarrow z_C = 3$

$\Rightarrow C(0; 0; 3)$

Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC

$\Leftrightarrow$ (S) đi qua O; A; B; C

Cách 1:

Gọi I(a; b; c) là tâm (S)

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = IO \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = IO^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(9-a)^2+b^2+c^2=a^2-(6-b)^2+c^2\\(9-a)^2+b^2+c^2=a^2+b^2+(3-c)^2\\(9-a)^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6a-4b-15=0\\3a-c-12=0\\2a-9=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{2}\\b=3\\c=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{9}{2};3;\frac{3}{2}\right)$$

+ Bán kính R của (S) là:

$$R=IO=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{9+4+1}=\frac{3}{2}\sqrt{14}$$

Do đó phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là:

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+(y-3)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{63}{2}$$

ách 2:

Gọi J là trung điểm đoạn AB

$$\Rightarrow\ J=\left(\frac{9}{2};3;\frac{3}{2}\right)$$

Trục (Δ) của ΔABC đi qua J và nhận vectơ $\vec{k}=(0;\ 0;\ 1)$ làm vectơ chỉ ương nên ta có phương trình:

$$\begin{cases}x=\dfrac{9}{2}\\y=3\\z=\dfrac{2}{2}+t\end{cases}\qquad (t\in\mathbf{R})$$

Gọi (α') là mặt phẳng trung trực cạnh OC

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (α') đi qua trung điểm $K(\ 0;\ 0;\ \dfrac{3}{2})$ của OC và có vectơ pháp yến $\vec{k}=(0;\ 0;\ 1)$

$\Rightarrow$ Phương trình $(\alpha'): z-\dfrac{3}{2}=0$

$\Rightarrow$ Tâm I của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC là giao điểm của (Δ) và $(\alpha'$

Do đó tọa độ điểm I là nghiệm x; y; z của hệ phương trình:

$$\begin{cases} z - \dfrac{3}{2} = 0 \\ x = \dfrac{9}{2} \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - t - \frac{3}{2} = 0 \qquad \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ y = 3 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{9}{2}; 3; \frac{3}{2})$$

+ Bán kính R của (S) là:

$$R = IO = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{9+4+1} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

Do đó phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là:

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{63}{2}$$

II. Dạng II: Đường tròn trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz

Chú ý : + *Đường tròn trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz là giao của mặt phẳng* (α) *và mặt cầu (S)*

+ Phương trình đường tròn trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz là:

Bài 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho ba điểm A(2; 4; 1); B(−1; 4; 0); C(0; 0; −3)

1. Chứng minh rằng A; B; C không thẳng hàng.
2. Đinh tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
3. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
4. Cho đường thẳng (d) $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t; \\ z = 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Chứng minh rằng (d) cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại hai điểm, tính tọa độ hai điểm đó.

Giải

a có: $\begin{cases}\overrightarrow{BA}=(3;0;1)\\ \overrightarrow{BC}=(1;-4;-3)\end{cases}$ không cùng phương

$\Rightarrow$ A; B; C không thẳng hàng

Mặt phẳng (ABC) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right]=(4;10;-12)$ làm vectơ pháp tuyến và C(0; 0; – 3) nên phương trình (ABC) là:

$4(x-0)+10(y-0)-12(z+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x+5y-6z-18=0$

ọi I(a; b; c) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

a có: $\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IB^2=IC^2\\ I\in mp\,(ABC)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2-a)^2+(4-b)^2+(1-c)^2=(-1-a)^2+(4-b)^2+(0-0)^2\\ (-a)^2+(-b)^2+(-3-c)^2=(-1-a)^2+(4-b)^2+(-c)^2\\ 2a+5b-6c-18=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a+c-2=0 & (1)\\ a-4b-3c+4=0 & (2)\\ 2a+5b-6c-18=0 & (3)\end{cases}$$

) $\Leftrightarrow$ $c=2-3a$ (4)

hay (4) vào (2); (3) ta được:

$$\begin{cases}a-4b-3(2-3a)+4=0\\ 2a+5b-6(2-3a)-18=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10a-4b-2=0\\ 20a+5b-30=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a-2b-1=0\\ 4a+b-6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{13}{13}=1\\ b=\dfrac{26}{13}=2\end{cases}\qquad(*)$$

hay (*) vào (4) ta được: $c=-1$

$\Rightarrow I(1;2;-1)$

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$r=IC=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$

ậy đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm I(1; 2; –1) và bán kính r = 3

ường tròn ngoại tiếp ΔABC là giao của mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; – 1) và bán r = 3 = R và mặt phẳng (ABC).

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9\\ 2x+5y-6z-18=0\end{cases}$$

4. Tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và đường tròn ngoại tiếp ΔABC là bộ (x; y; z) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9\\ 2x+5y-6z-18=0\\ x=2-5t\\ y=4+2t\\ z=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1-5t)^2+(2+2t)^2+4=9\\ 2(2-5t)+5(4+2t)-6-18\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}25t^2-10t+1+4+8t+4t^2+4-9=0\\ 0t=0 \quad \text{chứng tỏ } (d)\subset(ABC)\end{cases}$$

$$\Rightarrow 29t-2t=0 \qquad \Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\dfrac{2}{29}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ (d) cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại hai điểm phân biệt

$M_1(2;\ 4;\ 1)$ và $M_2\left(\dfrac{48}{29};\dfrac{120}{29};1\right)$

III. Dạng III : Tìm tâm và bán kính của đường tròn trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz

Bài 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α): $2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu

$$(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100.$$

Xác định tọa độ tâm; bán kính của (C) và viết phương trình của (C).

Giải

Mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ có tâm I(3; −2; 1) và bán kính R = 10

+ Ta có: $d(I,(\alpha))=\dfrac{|2.3-2.(-2)-1+9|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{18}{3}=6<R$

$\Rightarrow$ (α) cắt (S) theo đường tròn (C) có phương trình:

$$\begin{cases}2x-2y-x+9=0\\ (x-3)^2+(y+2)^2+(x-1)^2=100\end{cases}$$

* Bán kính đường tròn (C) được tính:

$$r = \sqrt{R^2 - [d(I,(\alpha))]^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

* Gọi H là hình chiếu của I(3; –2; 1) trên (α)

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn (C)

+ Xác định H: đường thẳng IH qua I(3; –2; 1) và nhận $\overrightarrow{n_\alpha} = (2;-2;-1)$làm vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của đường thẳng IH là:

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -2+(-2)t \\ z = 1+(-1)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -2-2t \\ z = 1-t \end{cases}$$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -2-2t \\ z = 1-t \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(3+2t)-2(-2-2t)-(1-t)+9=0$$

$$\Leftrightarrow 9t+18=0 \quad \Leftrightarrow t=-2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \qquad \Rightarrow H(-1;\ 2;\ 3)$$

IV. Các bài toán tổng hợp :

Bài 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ và mặt phẳng (P). $x+2y+2z+11=0$. Tìm M $\in$ (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là ngắn nhất.

Giải

(S) có tâm I(3; – 2; 1); bán kính R = 3,

Qua I kẻ đường thẳng $(\Delta) \perp (P)$; $\overrightarrow{n_P} = (1;2;2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_P} = (1;2;2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ)

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là:

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2+2t \quad (t \in R) \\ z = 1+2t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của mặt cầu (S) và (Δ) là bộ (x; y; z) thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9\\ x=3+t\\ y=-2+2t\\ z=1+2t\end{cases}$$

$$\Rightarrow t^2+4t^2+4t^2=9 \quad \Rightarrow t^2=1 \quad \Rightarrow \quad t=\pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=3+1=4\\ y=-2+2=0\\ z=1+2=3\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=3+(-1)=2\\ y=-2+2(-1)=-4\\ z=1+2(-1)=-1\end{cases}$$

Vậy đường thẳng (Δ) cắt (S) tại hai điểm $M_1(4;\ 0;\ 3)$; $M_2(2,\ -4,\ -1)$

+ Khoảng cách từ I đến (P) là:

$$d(I,(P))=\frac{|3-4+2+11|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{12}{3}=4>R=3$$

$\Rightarrow$ (P) không cắt (S)

Ta có: $d(M_1,(P))=\dfrac{|4+6+11|}{3}=7$

$$d(M_2,(P))=\frac{|2-8-2+11|}{3}=1$$

$d(M_1,(P)) < d(M_2,(P))$

Vậy điểm cần tìm là $M_1(4;\ 0;\ 3)$.

Bài 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S):

$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=11$ và hai đường thẳng $(\Delta_1): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

và $(\Delta_2): \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$

1. Viết phương trình mặt phẳng song song với (Δ_1) và (Δ_2) và tiếp xúc (S)
2. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua tâm (S) và cắt (Δ_1) và (Δ_2).

Giải

1. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;\ -1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{11}$

Đường thẳng (Δ_1) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;1;2)$

Đường thẳng (Δ_2) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;2;1)$

Do $\overline{u_1}$; $\overline{u_2}$ không cùng phương và mặt phẳng (α) song song với (Δ_1) và (Δ_2)

$$\Rightarrow \begin{cases}\overline{u_1}=(1;1;2)\\ \overline{u_2}=(1;2;1)\end{cases} \text{ là cặp vetơ chỉ phương của } (\alpha)$$

$\Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-3;1;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (α)

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $-3x + y + x + D = 0$

Do (α) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (\alpha)) = R$ (Với $I(1, -1, 0)$; $R = \sqrt{11}$)

Với $I(1, -1, 0)$; $R = \sqrt{11}$

$\Rightarrow \dfrac{|-3-1+D|}{\sqrt{9+1+1}} = \sqrt{11} \qquad \Leftrightarrow |-4+D| = 11$

$\Rightarrow D - 4 = \pm 11 \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D = 15 \\ D = -7 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn bài toán với phương trình:

$-3x + y + z + 15 = 0; \qquad -3x + y + z - 7 = 0$

2. Ta có tâm của mặt cầu (S) là: $I(1; -1; 0) \notin (\Delta_1)$ và $I(1; -1; 0) \notin (\Delta_2)$

+ Ta có: $M_1(0; -1; 1) \in (\Delta_1)$

$M_2(-1; 0; 0) \in (\Delta_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 1; -1) \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-3;1;1) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}.\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = 3 + 1 - 1 = 3 \neq 0$

$\Rightarrow (\Delta_1)$ và (Δ_2) chéo nhau; $I \notin (\Delta_1)$; $I \notin (\Delta_2)$

+ Gọi (β) là mặt phẳng chứa (Δ_1) và $I(1; -1; 0)$

+ Phương trình tổng quát của (Δ_1) là:

$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (β) có dạng:

$\lambda(x - y - 1) + \mu(2x - z + 1) = 0 \quad (*) \quad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow (\lambda + 2\mu)x + (-\mu)y - \mu.z + \mu - \lambda = 0$

Do mặt phẳng (β) qua $I(1; -1; 0)$ nên ta có:

$\lambda + 2\mu + 1 + \mu - 1 = 0$

$\Rightarrow 3\mu + \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = -3\mu \quad \Rightarrow \mu \neq 0 \quad (\text{vì } \lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

Từ $(*) \Rightarrow$ Phương trình (β) là:

$-3\mu(x - y - 1) + \mu(2x - z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow -x + 3y - z + 4 = 0$

* Phương trình tham số (Δ_2) :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \qquad\qquad (t \in \mathbf{R}) \\ z = t \end{cases}$$

Gọi N là giao điểm của (Δ_2) và (β)

⇒ Tọa độ điểm N là bộ (x;y;z) thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -1 + t + 2t - t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow N(-\dfrac{3}{2};-1;-\dfrac{1}{2})$

Khi đó $\overrightarrow{IN} = \left(-\dfrac{5}{2};\ 0;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ không là vectơ chỉ phương của (Δ_1)

⇒ Đường thẳng IN cắt (Δ_1) và (Δ_2)

Ta có: $\overrightarrow{IN} = -\dfrac{1}{2}(5;0;1)$

⇒ vectơ $\vec{a} = (5;\ 0;\ 1)$

⇒ Phương trình chính tắc của IN là:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho mặt cầu (S) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 10$ và hai đường thẳng (Δ_1):

$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ và (Δ_2): $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$

1. Viết phương trình mặt phẳng song song với (Δ_1) và (Δ_2) và tiếp xúc (S)
2. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua tâm (S) và cắt (Δ_1) và (Δ_2).

Bài 2. Cho hai đường thẳng

$$(\Delta_1)\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ t = 4 \end{cases} \qquad (\Delta_2)\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t' \\ y = t' \end{cases}$$

Tìm phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của (Δ_1) và (Δ_2) làm đường kính.

Bài 3. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + 6z - 16 = 0$. (α) cắt Ox tại A; Oy tại B; Oz tại C. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC?

Bài 4. Tìm tâm và bán kính đường tròn:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0 \\ 2x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 5. Tìm tâm và bán kính đường tròn:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z + 9 = 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 10 \quad (S) \end{cases}$$

Bài 6. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

(S): $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$ tại điểm $M(-5; -1; 5)$

Bài 7. Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 5 = 0$ và đi qua đường thẳng

$$(d): \begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Bài 8. Cho mặt cầu (S): $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 10$ và hai đường thẳng (Δ_1): $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $(\Delta_2): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$

1. Viết phương trình mặt phẳng song song với (Δ_1) và (Δ_2) và tiếp xúc (S).
2. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua tâm của mặt cầu (S) và cắt (Δ_1) và (Δ_2).

Bài 9. Cho hai đường thẳng

$$(\Delta_1) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ t = 4 \end{cases} \qquad (\Delta_2) \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = 1 + 2t' \\ y = t' \end{cases}$$

Tìm phương trình mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của (Δ_1) và (Δ_2) làm đường kính.

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU 3

Chương I 5

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG 5

Vấn đề I 5

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG, GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH 5

Vấn đề II 63

ĐƯỜNG TRÒN 63

ELIP (E) 106

HYPEBOL (H) 150

PARAPOL (P) 178

Chương II 200

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Vấn đề I 200

TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM

Vấn đề II 210

MẶT PHẲNG

Vấn đề III 217

ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

Vấn đề IV 241

CHỌN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ Oxyz ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Vấn đề V 252

MẶT CẦU; GIAO CỦA MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

★ ★ ★

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: TIẾN ĐẠT

Trình bày bìa: THÁI VĂN

KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO HÌNH HỌC 12

Mã số: 1L –31 ĐH2006
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm tại Xưởng in Công ty phát triển CN truyền hình TP. HCM. Số xuất bản: 203 – 2006/CXB/9 – 27/ĐHQGHN, ngày 20/03/2006.
Quyết định xuất bản số: 95 KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.